情報通信と符号化

韓　承鎬

電気通信大学

第五回目

MAP 受信機

最適判定基準

その際に送信されたデータ m と判定したデータ $\hat{m}$ の誤り

$$P_e = \Pr\{m \neq \hat{m}\}$$

が最小となる判定ルールを**最適判定**とする．

- 判定ルール：$\hat{m} = g(\boldsymbol{r})$
  $g(\cdot)$ は受信信号 $\boldsymbol{r} \in \mathbb{R}^N$ から $\mathcal{M}$ への関数
- 受信信号 $\boldsymbol{r}$ が正しく判定される確率

$$1 - P_e = \Pr\{m = g(\boldsymbol{r})|\boldsymbol{r}\} = \int_{\mathbb{R}^N} \Pr\{m = g(\boldsymbol{r})|\boldsymbol{r}\} p(\boldsymbol{r}) d\boldsymbol{r}$$

判定の最適化

$$1 - P_e = \int_{\mathbb{R}^N} \Pr\{m = g(\boldsymbol{r})|\boldsymbol{r}\} p(\boldsymbol{r}) d\boldsymbol{r}$$

1. $p(\boldsymbol{r})$ は常に非負の値を取るので，$\Pr\{m = g(\boldsymbol{r})|\boldsymbol{r}\}$ がすべて最大となるのが最適判定
2. 各受信信号 $\boldsymbol{r}$ に対して確率 $\Pr\{m = \hat{m}|\boldsymbol{r}\}$ が最大となる $\hat{m}$ を出力する関数 $g(\cdot)$ が最適判定ルール
3. Maximum a posteriori Probability(MAP) 受信機

$$g_{\mathrm{opt}}(\boldsymbol{r}) = \mathrm{argmax}_{m \in \mathcal{M}} P_m p(\boldsymbol{r}|\boldsymbol{s}_m)$$

4. $P_m = 1/M$ の場合, Maximum Likelihood(ML) 受信機

$$g_{\mathrm{opt}}(\boldsymbol{r}) = \mathrm{argmax}_{m \in \mathcal{M}} p(\boldsymbol{r}|\boldsymbol{s}_m)$$

複素数の確率密度関数

複素数の確率密度関数

確率変数 $Z = X + jY$ で，$X, Y \sim \mathcal{N}(0, \frac{N_0}{2})$ の場合，

- $X, Y \sim \mathcal{N}(0, \frac{N_0}{2})$

$$f_X(x) = f_Y(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi \frac{N_0}{2}}} \exp\left\{-\frac{x^2}{N_0}\right\} = \frac{1}{\sqrt{\pi N_0}} \exp\left\{-\frac{x^2}{N_0}\right\}$$

- X と Y は独立

$$\begin{aligned} f_Z(z) &= f_X(x) f_Y(y) = \frac{1}{\sqrt{\pi N_0}} \exp\left\{-\frac{x^2 + y^2}{N_0}\right\} \\ &= \frac{1}{\sqrt{\pi N_0}} \exp\left\{-\frac{|z|^2}{N_0}\right\} \end{aligned}$$

雑音ベクトルの確率密度関数

$\boldsymbol{n} = (n_0, n_1, \cdots, n_{N-1})$ 分布

$$p(\boldsymbol{n}) = \left(\frac{1}{\sqrt{\pi N_0}}\right)^N e^{-\frac{\|\boldsymbol{n}\|^2}{N_0}}$$

AWGN での MAP 判定

- 一般的な最適判定

$$
\begin{aligned}
\hat{m} &= \arg\max_{m \in \mathcal{M}} P_m p(\boldsymbol{r}|\boldsymbol{s}_m) \\
&= \arg\max_{m \in \mathcal{M}} \left\{ \frac{N_0}{2} \ln P_m - \frac{1}{2} \|\boldsymbol{s}_m\|^2 + \boldsymbol{r}\boldsymbol{s}_m^T \right\}
\end{aligned}
$$

- $P_m = \frac{1}{M}$ の場合

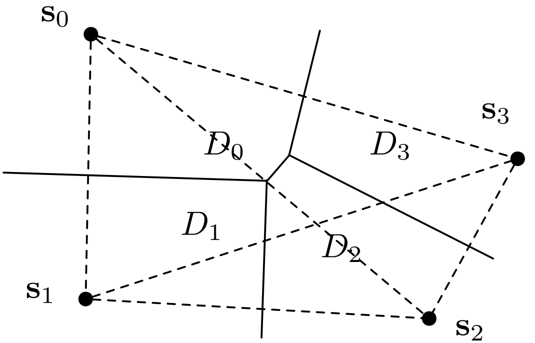
$$
\begin{aligned}
\hat{m} &= \arg\max_{m \in \mathcal{M}} \left\{ -\|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{s}_m\|^2 \right\} \\
&= \arg\min_{m \in \mathcal{M}} \left\{ \|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{s}_m\| \right\}
\end{aligned}
$$

ML での最適判定領域

- 信号空間 $\boldsymbol{R}^N$ を M 個の領域 D_m, $m \in \mathcal{M}$, に分割
- 受信された信号が D_m に属す場合 m が送信されたと判定

判定境界

二つの信号点を結んだ直線を垂直に二分する直線



判定の例

送信ビット 0、1 に応じて，$\boldsymbol{s}_0 = [++]$ と $\boldsymbol{s}_1 = [--]$ のベクトル形式の信号を送信した場合，AWGN 通信路での受信信号は

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{s}_i + \boldsymbol{n}, \ \ i = 0, 1$$

で表されるが、雑音は $\boldsymbol{n} = [n_1, n_2]$ 複素ガウス分布 $n_1, n_2 \sim \mathcal{CN}(0, \frac{1}{2})$ と仮定する．信号 $\boldsymbol{r} = [0.3, -0.2]$ を受信した場合、

1. 0,1 の送信確率がそれぞれ $P_0 = 0.4$, $P_1 = 0.6$ の場合，MAP 受信機で送信信号を判定せよ．
2. 0,1 が同確率で送信された場合，0,1 の判定領域を画け．
3. ML 受信機で送信信号を判定せよ．

解答例 (1/2)

それぞれの事後確率（$\boldsymbol{s}_i$ を送信した場合，$\boldsymbol{r}$ を受信する確率）は

$$
\begin{aligned}
p(\boldsymbol{r}|\boldsymbol{s}_0) &= p_{\boldsymbol{n}}(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{s}_0) = p_{\boldsymbol{n}}([0.7, -1.2]) = \frac{1}{\pi}e^{-0.7^2-1.2^2} \\
p(\boldsymbol{r}|\boldsymbol{s}_1) &= p_{\boldsymbol{n}}(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{s}_1) = p_{\boldsymbol{n}}([1.3, -0.8]) = \frac{1}{\pi}e^{-1.3^2-0.8^2}
\end{aligned}
$$

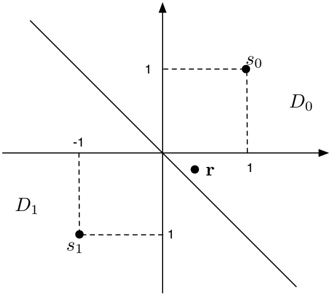
となり、

$$
P_0 p(\boldsymbol{r}|\boldsymbol{s}_0) = \frac{0.4}{\pi}e^{-0.7^2-1.2^2} < P_1 p(\boldsymbol{r}|\boldsymbol{s}_1) = \frac{0.6}{\pi}e^{-1.3^2-0.8^2}
$$

より，MAP 判定では送信データは 1 と判定する。

解答例 (2/2)

$\boldsymbol{r} = [r_0, r_1]$ とし，r_0, r_1 を横軸と縦軸に取る。$\boldsymbol{s}_0 = [++]$ と $\boldsymbol{s}_1 = [--]$ を結んだ線を直行で二分する線が判定境界となるので，判定境界は次図で示した $r_1 = -r_0$ の直線となる．



受信信号 $\boldsymbol{r}$ は $\mathbb{D}_0$ に含まれるので、ML 判定では送信データは 0 と判定する．

課題

送信ビット 0、1、2, 3 に応じて，$\boldsymbol{s}_0 = [++]$ と $\boldsymbol{s}_1 = [+-], \boldsymbol{s}_2 = [-+], \boldsymbol{s}_3 = [--]$ のベクトル形式の信号を送信した場合，AWGN 通信路での受信信号は

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{s}_i + \boldsymbol{n}, \ \ i = 0, 1$$

で表されるが、雑音は $\boldsymbol{n} = [n_1, n_2]$ 複素ガウス分布 $n_1, n_2 \sim \mathcal{CN}(0, \frac{1}{2})$ と仮定する．信号 $\boldsymbol{r} = [-0.7, 0.1]$ を受信した場合、

1. 送信確率がそれぞれ $P_0 = 0.2, P_1 = 0.3, P_2 = 0.2, P_3 = 0.3$ の場合，MAP 受信機で送信信号を判定せよ．
2. 同確率で送信された場合，信号の判定領域を画け．
3. ML 受信機で送信信号を判定せよ．