情報通信と符号化

韓　承鎬

電気通信大学

第四回目

一次元ガウス分布：$\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$

- 期待値：$\mu \in \mathbb{R}$
- 　分散：$\sigma > 0$
- 確率密度関数

$$f_X(X = x) = f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

- 標準正規分布：$\mathcal{N}(0, 1)$

Q 関数

Q 関数

標準正規分布に従う確率変数 X の値が x を超える累積確率

$$Q(x) = \Pr\{\mathcal{N}(0,1) > x\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_x^\infty e^{-\frac{t^2}{2}} dt$$

性質

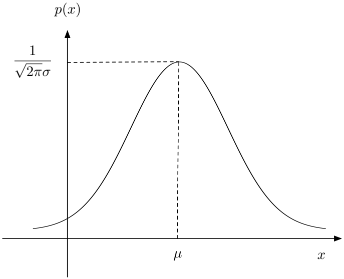
- $Q(0) = \frac{1}{2}$
- $Q(\infty) = 0$
- $Q(-\infty) = 1$
- $Q(-x) = 1 - Q(x)$

ガウス確率変数の累積分布関数

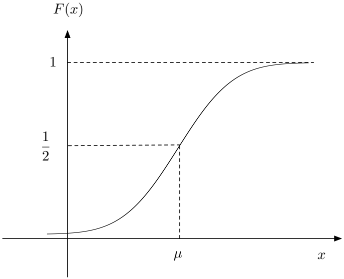
ガウス確率変数の累積分布関数は，変数変換 $u = (t - \mu)/\sigma$ を用いて，Q 関数で表せる．

$$
\begin{aligned}
F(x) &= \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}} dt \\
&= 1 - \int_{x}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}} dt \\
&= 1 - \int_{\frac{x-\mu}{\sigma}}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{u^2}{2}} du \\
&= 1 - Q\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)
\end{aligned}
$$

ガウス確率変数の確率密度関数および累積分布関数



(a)



(b)

通信路の影響

デジタル通信では、整数の情報を正弦波の振幅，周波数もしくは位相に載せて送受信

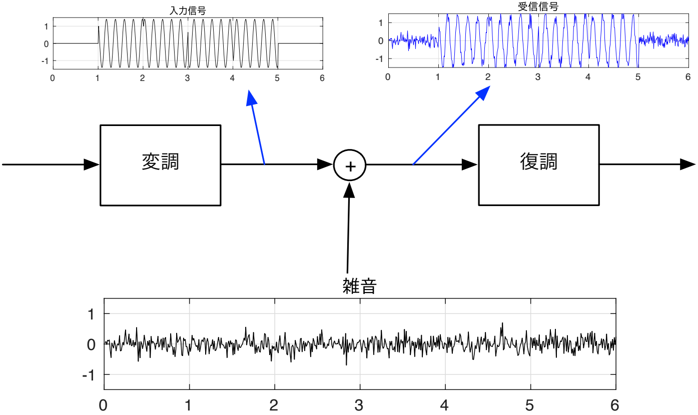
通信路の影響

- 雑音：受信機の熱雑音
- 減衰：伝搬途中の減衰
- 歪み：帯域制約などによるもの
- フェージング：反射波によるもの
- 干渉：多重化

結果：振幅，周波数もしくは位相が変化 $\Rightarrow$ 誤りを引き起こす

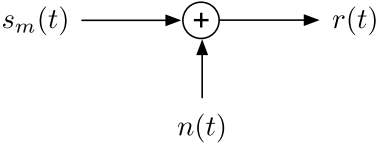
加法性雑音の影響

受信機の熱雑音が発生源のため、すべての通信路において存在し，多くの場合通信誤りを引き起こす主な原因



加法性通信路の波形モデル

- 送信データ：$m \in \mathcal{M}$, $\mathcal{M} := \{m\}_{m=0}^{M-1}$
- 変調信号：$s_m(t)$
- 受信信号：$r(t)$
- 雑音：$n(t)$



$$r(t) = s_m(t) + n(t)$$

加法性通信路のベクトルモデル

異なる変調方式で雑音の影響を統一的に表現するために、$s_m(t)$ に対して完備な N 次元直交基底 $\{\alpha_n(t)\}_{n=0}^{N-1}$ での写像を用いて表現！

$$s_{m,n} = \int_0^{\infty} s_m(t)\alpha_n(t)dt, 0 \leq n < N$$

とすると、$\boldsymbol{s}_m = (s_{m,n})_{n=0}^{N-1}$ は信号

$$s_m(t) = \sum_{n=0}^{N-1} s_{m,n}\alpha_n(t)$$

に一意的に対応する.

加法性通信路のベクトルモデル

雑音 $n(t)$ に対しても，ベクトル $\boldsymbol{n} = (n_i)_{i=0}^{N-1}$

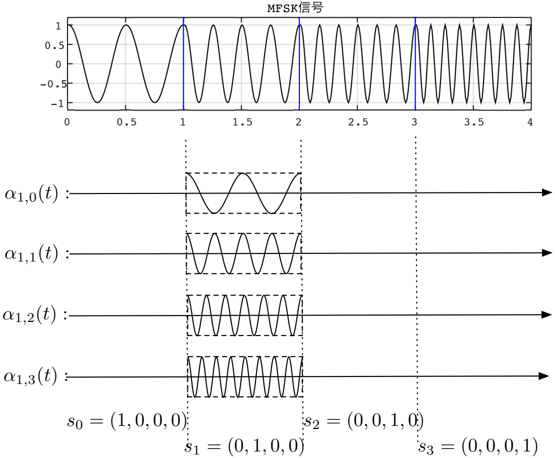
$$n_i = \int_0^\infty n(t)\alpha_i(t)dt, 0 \leq i < N$$

を導入すると、加法性通信路をベクトルの加算

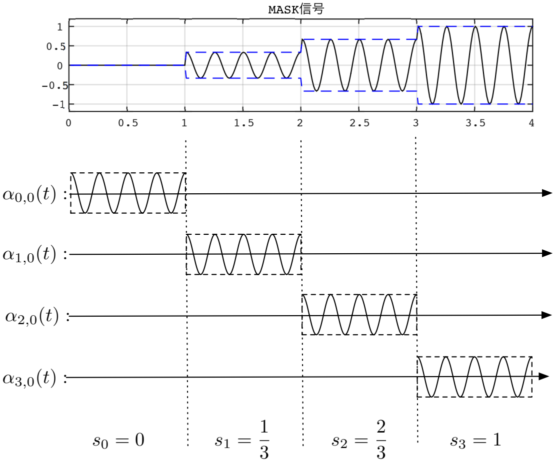
$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{s}_m + \boldsymbol{n}$$

で表現できる。

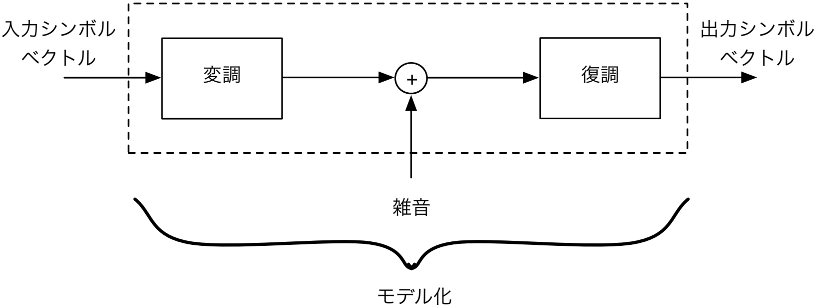
MFSK 信号のベクトル表現例

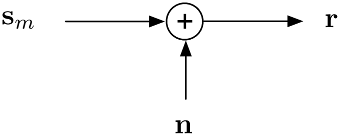


MASK 信号のベクトル表現例

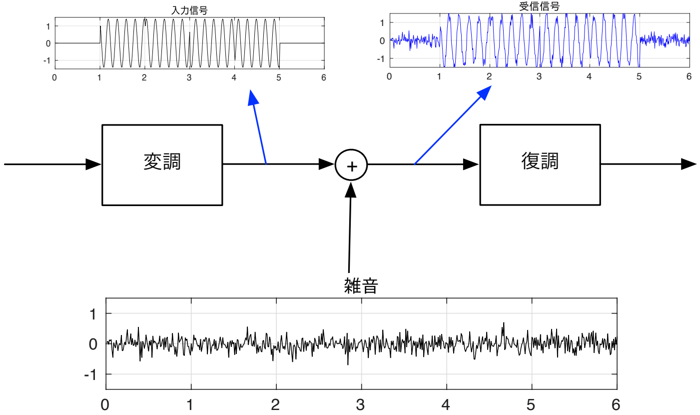


加法性通信路のベクトルモデル





雑音の影響



一定の入力に対して、様々な出力がランダムに現れる

加法性通信路の確率モデル

雑音

確定的な入力 $\boldsymbol{s}_m$ に対して、不確定的な信号 $\boldsymbol{r}$ を出力するもの

- $m \in \mathcal{M}$ が送信される確率を P_m とすると，送信機は同じ確率 P_m で $\boldsymbol{s}_m$ を送信
- 送信機が $\boldsymbol{s}_m$ を送信した場合，受信機が $\boldsymbol{r} \in \mathbb{R}^N$ を受信する同時確率密度

$$p(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{s}_m) = p(\boldsymbol{r}|\boldsymbol{s}_m) P_m$$

$$\mathbf{s}_m \longrightarrow \boxed{p(\mathbf{r}|\mathbf{s}_m)} \longrightarrow \mathbf{r}$$

加法性通信路の確率モデル

- データ 0, 1 に応じて振幅 $s = 1, -1$ の余弦波を送信
- 雑音

N	0	± 0.5	± 1	± 1.5	± 2
$\Pr\{N = n\}$	$\frac{5}{25}$	$\frac{4}{25}$	$\frac{3}{25}$	$\frac{2}{25}$	$\frac{1}{25}$

- $s = 1$ が送信された場合

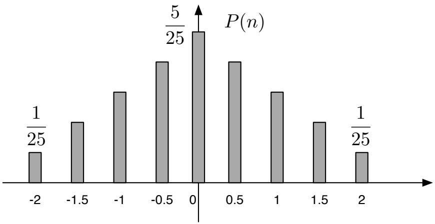
r	-1	-0.5	0	0.5	1	1.5	2	2.5	3
$\Pr\{r\}$	$\frac{1}{25}$	$\frac{2}{25}$	$\frac{3}{25}$	$\frac{4}{25}$	$\frac{5}{25}$	$\frac{4}{25}$	$\frac{3}{25}$	$\frac{2}{25}$	$\frac{1}{25}$

- $s = -1$ が送信された場合

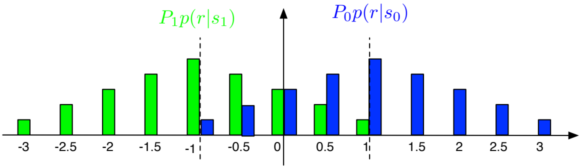
r	-3	-2.5	-2	-1.5	-1	-0.5	0	0.5	1
$\Pr\{r\}$	$\frac{1}{25}$	$\frac{2}{25}$	$\frac{3}{25}$	$\frac{4}{25}$	$\frac{5}{25}$	$\frac{4}{25}$	$\frac{3}{25}$	$\frac{2}{25}$	$\frac{1}{25}$

雑音と受信信号

雑音の分布

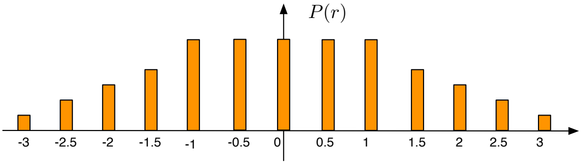


受信信号の分布

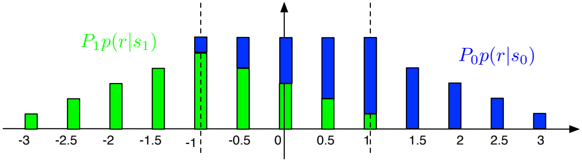


受信信号

受信信号の分布



受信信号の内訳



加法性通信路の確率モデル

特徴

- 入出力間の確率密度関数を用いて雑音を表すので、入力は一つ
- 雑音がない時の通信路の確率モデル

$$p(\boldsymbol{r}|\boldsymbol{s}_m) = \begin{cases} 1; & \boldsymbol{r} = \boldsymbol{s}_m \\ 0; & \text{otherwise} \end{cases}$$

- $\boldsymbol{r} - \boldsymbol{s}_m = \boldsymbol{n} \Rightarrow p((\boldsymbol{r} - \boldsymbol{s}_m)|\boldsymbol{s}_m) = p(\boldsymbol{n})$ なので，$p(\boldsymbol{n})$ から通信路の確率密度関数を求められる．
- 雑音と送信信号の具体的な算術演算の指定がないので，すべての通信路を確率モデルで表現できる．