情報通信と符号化

韓　承鎬

電気通信大学

第三回目

条件付き確率

事象 $\mathbb{F}$ が起きる条件下での事象 $\mathbb{E}$ の条件付確率

事象 $\mathbb{E}, \mathbb{F}$ に対して,$\Pr\{\mathbb{F}\} \neq 0$ のとき

$$\Pr\{\mathbb{E}|\mathbb{F}\} = \frac{\Pr\{\mathbb{E} \cap \mathbb{F}\}}{\Pr\{\mathbb{F}\}}$$

確率の積の公式

$$\Pr\{\mathbb{E} \cap \mathbb{F}\} = \Pr\{\mathbb{E}|\mathbb{F}\} \Pr\{\mathbb{F}\} = \Pr\{\mathbb{F}|\mathbb{E}\} \Pr\{\mathbb{E}\}$$

独立性

独立事象

事象 $\mathbb{F}$ に事象 $\mathbb{E}$ に関数する情報が含まれてないとき，つまり

$$\Pr\{\mathbb{E}|\mathbb{F}\} = \Pr\{\mathbb{E}\}$$

のとき，事象 $\mathbb{E}$ と $\mathbb{F}$ は**独立**であるという．

互いに独立な事象 $\mathbb{E}, \mathbb{F}$ に対して

$$\Pr\{\mathbb{E} \cap \mathbb{F}\} = \Pr\{\mathbb{E}\} \Pr\{\mathbb{F}\}$$

独立性、条件付分布 (離散の場合)

離散確率変数 X, Y において

独立性

すべての i, j に対して

$$P_{X,Y}(x_i, y_j) = P_X(x_i)P_Y(y_j)$$

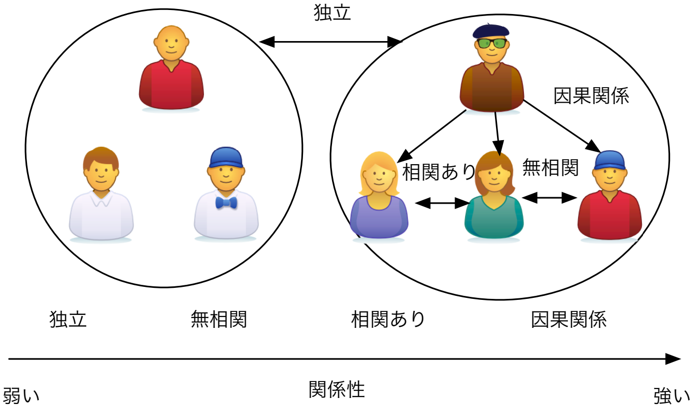
が成り立つ

$Y = y$ が生じる条件のもとでの X の条件付分布

$P_Y(y) \neq 0$ のとき

$$P_{X|Y}(x|y) := \Pr\{X = x|Y = y\} = \frac{P_{X,Y}(x,y)}{P_Y(y)}$$

関係性



ベイズ定理

Theorem

事象 $\mathbb{E}$ と $\mathbb{F}$ に対して，事象 $\mathbb{F}$ が起きる前の事象 $\mathbb{E}$ の確率 $\mathsf{Pr}\{\mathbb{E}\}$ を**事前確率**といい，事象 $\mathbb{F}$ が起きた後での事象 $\mathbb{E}$ の確率 $\mathsf{Pr}\{\mathbb{E}|\mathbb{F}\}$ を**事後確率**とよぶ．ベイズ定理によれば，事象 $\mathbb{F}$ の事後確率は

$$\mathsf{Pr}\{\mathbb{F}|\mathbb{E}\} = \frac{\mathsf{Pr}\{\mathbb{E}|\mathbb{F}\}\,\mathsf{Pr}\{\mathbb{F}\}}{\mathsf{Pr}\{\mathbb{E}\}}$$

で計算される．

一次元ガウス分布：$\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$

- 期待値：$\mu \in \mathbb{R}$
- 　分散：$\sigma > 0$
- 確率密度関数

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

- 標準正規分布：$\mathcal{N}(0, 1)$

Q 関数

Q 関数

標準正規分布に従う確率変数 X の値が x を超える累積確率

$$Q(x) = \Pr\left\{\mathcal{N}(0,1) > x\right\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_x^\infty e^{-\frac{t^2}{2}} dt$$

性質

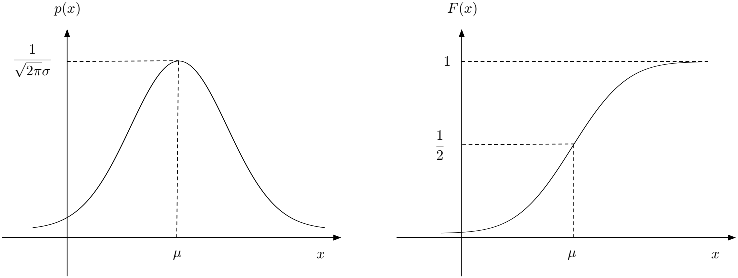
- $Q(0) = \frac{1}{2}$
- $Q(\infty) = 0$
- $Q(-\infty) = 1$
- $Q(-x) = 1 - Q(x)$

ガウス確率変数の累積分布関数

ガウス確率変数の累積分布関数は，変数変換 $u = (t - \mu)/\sigma$ を用いて，Q 関数で表せる．

$$
\begin{aligned}
F(x) &= \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}} dt \\
&= 1 - \int_{x}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}} dt \\
&= 1 - \int_{\frac{x-\mu}{\sigma}}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{u^2}{2}} du \\
&= 1 - Q\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)
\end{aligned}
$$

ガウス確率変数の確率密度関数および累積分布関数



(a) (b)