情報通信と符号化

韓　承鎬

2018 年 4 月 25 日

目次

第 1 章

情報通信の歴史と発展

1.1　電信以前の通信

電信や伝書鳩以前，通信は視覚に頼ったものが多かった．ギリシャでは，松明リレーで戦果を伝え，アジアの日本や中国では狼煙台を立てて，煙で外敵の侵攻を知らせた．当時の政府にとって通信の保持は，軍隊の維持と同じように国家の統治上，欠かせないものだったのであった．

ヨーロッパでは 1790 年に，フランス人技師クロード・シャツプ（Claude Chappe）が考案した腕木通信機が実用化に成功し，18 から 19 世紀にかけて欧米の主な通信方式となった．そして 100 年後には，フランスは総距離 4800km をカバーする 556 個の腕木信号局網を有していたが，それは図．1.1 のように，柱に上下に動けるようにした腕木をつけた腕木通信機を数十 km ごとに配置したものであった．そして，

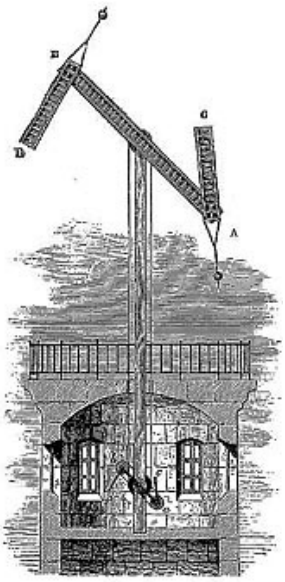

図 1.1　腕木通信機

文字を腕木の形状に対応させ，その形状の変化を望遠鏡[*1]で読みとり，リレー式に伝達していくという通

[*1] 望遠鏡は，オランダの眼鏡屋ハンス・リッペルスハイ（Hans Lippershey）によって 1608 年に発明されたが，イタリアのガリレオ・ガリレイ（Galileo Galilei）はこれを改良し，天体観測を行った．

信方法である．

1.2 電信の発明

1831 年，イギリスではマイケル・ファラデー（Michael Faraday）が電磁誘導の実験を行い，電磁場の基礎理論を確立すると，高速に伝わる電気を使った通信方式の研究が始まった．

その翌年，歴史画家として名が知られていたサミユエル・モールス (Samuel Finley Breese Morse) は，大西洋横断中の船内にいた．彼はそこで電磁気学の話を聞き，電信機の開発に加わり，1836 年に人間の言葉を「トン」と「ツー」のわずか二種類の符号の組み合せに置き換えて通信を行う電信機を開発した．そしてモールスは改良を加えて 1840 年に特許を取得し，各国に自分の電信機の売り込みに走っていた．しかし，当時のフランスはすでに腕木信号局網があり，イギリスではウィリアム・クック（William Fothergill Cooke）が発明した五針電信機による電信網が開通を待っていた．

最初に商業化された電信とされている五針電信機電信は，1837 年 5 月にクックとチャールズ・ホイートストン（Charles Wheatstone）が共同に特許を取得したものであるが，それは図.1.2 のように盤面に五個の磁針をならべ，電気の強弱で動く針の組み合せによって文字を送るものである．五針電信機電信は 1839 年にパディントン駅からウェスト・ドレイトンまでの間，約 21km にわたってグレート・ウェスタン鉄道の線路を利用して敷設された．

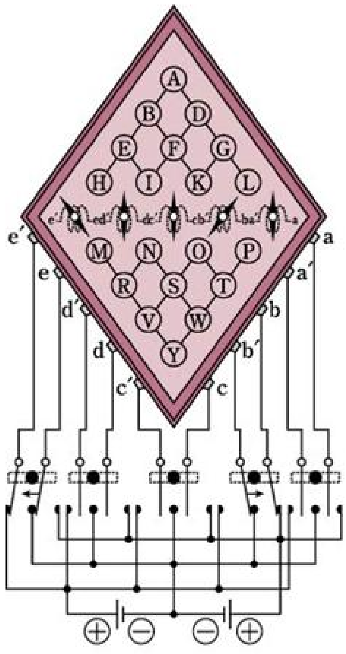

図 1.2　五針電信機

モールスの通信機は，フランスとイギリスでは実用化されなかったが，捨てる神あれば拾う神あり (When one god deserts you, another will pick you up）と，モールスはアメリカ政府直営の通信業務開始にこぎつけた．そして，1845 年元日，ワシントンから約 64km 離れた港湾都市ボルチモアとの間の電信開通式に参加し，「トン・ツー 」と電文で聖書の中にある言葉をボルチモアへ送った [2].

What hath God wrought!

118 年後の 1963 年 8 月 23 日，アメリカは宇宙にシンコム通信衛星を打ち上げ，全世界との即時通話を実現するが，開通記念通話にあたり，ケネディ大統領は，モールスが打った電文と同じ言葉を，最初のメッセージにしている．

モールス通信機は，五針電信機のような文字盤方式に直接文字を読み取れるのもではなく，モールス符号を覚えないとならなかったので，発明当初は人気がなかった．ところが，電信の出現に先立って産業革命の旗手として 1830 年に運行が始まった鉄道が急速にヨーロッパ全土に普及し，電信は列車の安全運行のために，列車運行を一元的に確保する手段として使われていた．その結果，電信は鉄道の普及に平行し，鉄道沿線に拡大され，各地をつなぐ電信網を形成するようになり，1852 年のイギリスは全長 6500km の電信網を有し，ヨーロッパの他の国も 1845 年から 1852 年かけて電信網を完成した．そして遠距離伝送の需要が増加し，電信の商業化により通信文が多量になると，電流を「トン・ツー」と打つだけで伝送するモールス方式が，故障も少なく電信線の長距離建設が容易であることより電信の王座を独占することになる．

1.3　海を越えた通信の実現

陸で繋がっているところへの通信が実現できると，人類は海を越える電気通信へ挑戦する．1851 年，イギリス人のジョン・ブレット（John Brett）によって英仏海峡のカレーとドーバー間約 50km に海底電線が敷設され，英国とヨーロッパは情報面で一体化されたことになる*2．

ドーバー海峡に海底電信を敷設してから 6 年後，サイラス・フィールド（Cyrus West Field）は大西洋横断ケーブルの敷設に挑戦する．フィールド [3] は 1857 年から，アメリカとイギリスの船で米巡洋艦ナイヤガラと英船アガメムノンは，ニューファンドランドとアイルランドの間に海底ケーブル敷設のため出航する．二度のケーブル切断事故に遭って，翌年にケーブル敷設するが，二ヶ月後には通信ができなくなる．結局，海底電信の大西洋横断に成功するは，8 年後の五度目の挑戦である．

1.4　電話機の発明

モールス符号は，長距離電信に適しているが，符号を取扱うには技術を習得するための訓練が必要である．それで，だれでもがすぐに扱える通信機械として，文字よりも手っ取りばやい音声そのものの伝達手法の開発が始まる．しかし，当時の物理学者や電気学者の大勢は，周波数の高い人間の声を電気を使って伝達することに否定的であった．

このような学界の常識にお構いなく，聾者教育に従事していたアレクサンダー・グラハム・ベル（Alexander Graham Bell）は，音波と同じ波形の電流を生成するための実験を行い続ける．そして，28 歳の時羊皮紙をぴんと張り，鉄心に電線を巻いたコイルを接続して，送話器とする電磁石式電話機ー「絞首台電話機」を発明し，1876 年 2 月 14 日ワシントンの特許局に特許申請を行った．その後，ベルは雑音の多い電磁石式電話機から実用化できる液体電話機を発明し，アメリカ建国 100 周年を祝う建国記念博

*2 パリで通信社に勤めていたロイターは，ドーバー海峡横断電信開設を聞きつけると，パリの通信社をやめて翌年ロンドンに移り，今日の世界的通信社であるロイター通信を設立する．

覧会に液体電話機を出品した．翌年の 4 月 3 日にはボストン－ニューヨークの間に電話が開通されるが，翌々年には発明王エジソンが炭素を使って送話器の性能を飛躍的に向上させたので，電話の普及は一段と早まった*3.

1.5　マルコーニの無線電話

電線を使って電信と電話の実用化に成功したら，つぎは電線を使わないで同様のことができないかと考える．1887 年，ドイツの物理学者ハインリヒ・ルドルフ・ヘルツ（Heinrich Rudolf Hertz）が電磁波の存在を実験的に証明すると，1896 年にイタリアの物理学者グリエルモ・マルコーニ（Guglielmo Marconi）は，電気火花による電磁波で「トン・ツー 」のモールス符号を送る無線通信を発明した．マルコーニに 1 年先立って，ロシアの Popov が無線通信に成功するが，自国のロシア政府への献策が入れられなかった．それに対して，マルコーニはイタリアで彼の成果に興味を持つ者は少ないと，時第一の工業国の英国に渡り事業化に成功する．

1901 年，英国のイングランドから発信した無線のニューファンドランドでの受信に成功し，大西洋横断を果たすと，1906 年には発明王エジソンの助手をしていたレジナルド・オーブリー・フェッセンデン（Reginald Aubrey Fessenden）は，持続して電波の出る周波数発生器を製作し無線電話を発明する．

1.6　通信のデジタル化

ベルやエジソンの発明した送話器を使うと音声の波を同じ波形の電気信号に変換することができるので，電話回線通じてその信号を遠く離れたところへ届け受話器を鳴らせば，もとの音声を復元できる．人間の音声は，50Hz～20kHz の振動があるが，現在の電話回線では，人間の声を 300Hz～3400Hz の周波数の範囲でとらえて送るように国際的に取り決めている．アナログ方式と呼ばれている初期の方式では，音声の振動を 300Hz～3400Hz の周波数の電気信号に置き換えて，受話者側に伝送され受話器で音声に復元されるが，この方式では，いったん波形が崩れると，受信側には波形の原形がどのようなものか判断できないので修正の方法がない．

アナログ信号をデジタル信号に変換する際の標本化間隔問題について，1928 年にハリー・ナイキスト (Harry Nyquist) が予想した標本化定理が，1949 年にクロード・E・シャノン*4(Claude Elwood Shannon) と日本の染谷勲によってそれぞれ独立に証明される．また，その期間中の 1937 年には，アメリカの ITT（国際電信電話会社）パリ研究所のイギリス人リーブス（Alec Harley Reeves）が，アナログ信号をデジタル信号に変換する PCM（pulse code modulation）の理論を完成し特許を取得した．しかし，デジタル方式は処理が複雑になる欠点はあったため，発明同時は実現が困難となり，PCM 理論が実用化されるまでには，さらに 20 年*5ほどの歳月が必要だった．

1946 年ペンシルパニア大学で，重量 30 トン，長さ 30m の世界最初の電子計算機 [4] ーエニアック（ENIAC）が誕生すると，二年後にベル電話研究所のウィリアム・ショックレイ（William Bradford

*3 当初は複雑な電話機を一般人が操作できるか，記録が残らないので大事なことを託すことができるか，など否定的意見も多かった．

*4 1948 年にクロード・シャノンは “A Mathematical Theory of Communication”で通信に数学道具を導入し，情報理論の学問分野を確立するが，それは効率の良い通信を実現するための灯台となる．

*5 リーブス自身もこの発明を「はやすぎた発明だった」と，後日語っている．

Shockley Jr.）が，トランジスタを発明するが，それはまた 1959 年の集積回路 IC（Integrated Circuit）へ発展し，LSI（Large Scale IC）時代に突入する．コンピュータとの結合を技術的に好都合にさせているなどの理由より，デジタル方式の

- 保存が容易
- 軽度の損傷は修復可能
- 処理が容易
- 処理中の品質劣化が起こらない

などの利点が顕著になった．

すべての情報をデジタルデータで表現でき，コンピューターでそれを処理できるようになるとそれを運ぶ通信もデジタル時代を迎える．1969 年に開発が始まった ARPANET(Advanced Research Projects Agency Network) は，現在我々が日々使っているインターネット [5] と発展し，人類は ICT 革命を迎えたのである．

参考文献

[1] つたえる-情報通信- “https://youtu.be/a1oe8sC6yQY”, 科学技術庁企画, 東京文映製作, 1984.

[2] 北原安定, テレコム革命一電電公社の INS 構想を語る, 現代史出版会, 1983.

[3] John Steele Gordon, *A thread across the ocean: the heroic story of the transatlantic cable*, Walker & Co, 2002.

[4] 映画：The Imitation Game(イミテーション・ゲーム/エニグマと天才数学者の秘密)，2015.

[5] Tom Standage, *The Victorian Internet: The Remarkable Story of the Telegraph and the Nineteenth Century's On-line Pioneers*, Bloomsbury Pub Plc USA, Revised Ed., 2014.

第 2 章

現代通信システムの構成

一昔のアナログ通信システムでは，人の声や送信したい画像を電流の強弱に変換し，通信路を通して送信していたが，現在ではほとんどの通信システムがデジタル通信方式を取り入れている．図.2.1 はデジタル通信システムの基本構成とその機能を示す．

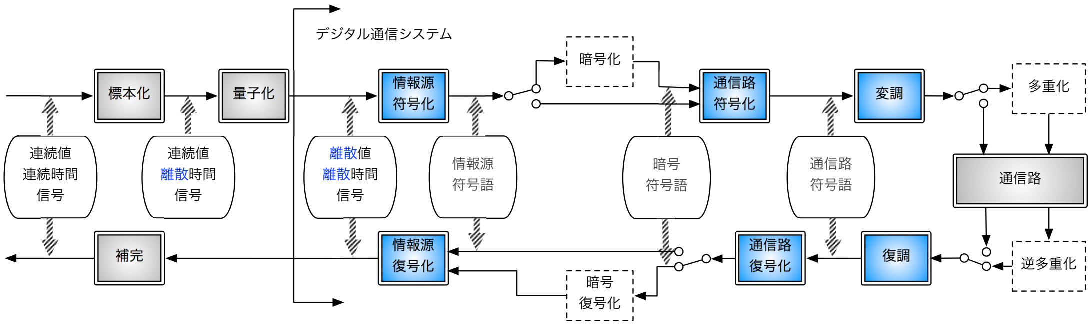

図 2.1　現代の通信システム

我々が現在取り扱う信号には，イーザーネットで送受信されるパソコンからの信号のようなデジタル信号と，映像や声などのアナログ信号がある．図.2.1 で示したデジタル通信システムの部分で送受信するには，入力された信号が**時間的に離散化され、有限な集合から値を取る**デジタル信号である必要がある．その故に，パソコンからのデジタル信号はデジタル通信システムで直接取り扱うことができるが，アナログ信号についてはデジタル通信システムで送信する前に標本化と量子化を行いデジタル信号に変換する必要がある．以下，各構成要素の機能を述べる．

2.1　標本化

図 2.2 で示したような時間的に連続な信号 $x(t)$ を離散的な時間での $x(t)$ の値，$x(t_0), x(t_1), \cdots$ を用いて表現することを**標本化**と呼ぶ．その目的は，時間的に連続なアナログ信号をデジタル通信システムで送信できるように時間軸上で離散化することであるが，直感的には標本化間隔を狭くすると復元した信号と元の信号の歪みは少なくなるが，伝送すべき標本値が多くなる．それで，Nyquist [1, 2] はいかに少ない標本値で，元の信号を歪みなく復元できるかを考え，次の定理を与えた．

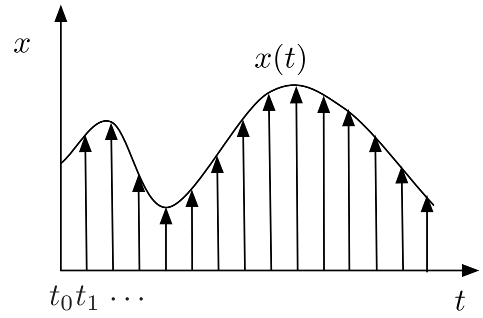

図 2.2　標本化

定理 1. 標本化定理情報信号 $x(t)$ の帯域を B とすると，時間間隔 $T_s \leq \frac{1}{2B}$ で抽出した標本から情報信号を完全に復元できる．

定理では触れてないが，標本値を sinc 関数と呼ばれる波形で補完を行えば，元の信号が歪みなく復元できるのである．

2.2　量子化

図 2.2 での標本値，$x(t_0), x(t_1), \cdots$ は通常実数の値を取り，このようなデータはデジタル通信システムでは送信できない．その理由はアナログ信号から標本化された信号は最低値と最高値の間の連続空間での値をとり得るので，このようなデータはデジタル通信システムで取り扱うことができない．デジタル通信システムで送信できる信号は $\{0, 1\}$ のように，値が取り得る集合が有限である必要があり，このように実数の無線集合 [3] から有限集合に取り得る値を変換する操作を**量子化**と呼ぶ．ここで注意したいことは，信号の集合が有限であることで，信号の値が有限である必要はない．

例 1. 例えば，次の五つの場合を考える．

1. $x(t) \in \mathbb{R}$
2. $x(t) \in [0\ 1]$
3. $x(t) \in \mathbb{Z}^+$
4. $x(t) \in \{\pi/2, \pi\}$
5. $x(t) \in \{0, 1\}$

1. は実数から値を取るので，デジタル通信システムで扱えないが，*2.* の場合にも *0* から *1* の有限の区間には無限の数が含まれているので，この場合にもデジタル通信システムで送信できない．*3.* の場合にも正の正数となる数は無限にあるが，この無限集合は *2.* の場合と異なり加算的 *(countable)* であるので現れる確率の分布によってはデジタル通信システムで扱える場合がある *[4]*．*4.* は値自

体が無理数なので送信される数字が無限に続くが，送信側で $\pi/2 \to 0$, $\pi \to 1$ に置き換え，受信側で逆の操作をすると，*5.* と同じく扱える．

標本化と異なり，歪みなく元の値を復元できる量子化の方法はないが，信号の出力が $-\infty < x(t) < \infty$ と有界である場合，$x(t)$ の最小値と最大値を同じ間隔で区切り，一番近い区切りの値で $x(t)$ を近似する線形量子化の場合，量子化ビットが 1 ビット増えると信号対雑音比は 6dB 改善する．

2.3　情報源符号化/復号化

量子化された有限集合に M 個の要素があると仮定し，各要素を $0, 1, 2, \cdots, M-1$ と番号付け，各々の要素を送信する代わりに，各要素の順序を送信し，受信側で元の要素を復元すれば，デジタル通信方式で扱う情報は，$0, 1, 2, \cdots, M-1$ の整数を二進数展開したビット列として考えることができる．この時に，情報を冗長な表現を省いたもっとも短いビット列で表すことが望ましい．このように情報源からの入力を圧縮する操作を**情報源符号化**と呼ぶ．

例 2. 情報源 $\mathcal{X} = \{x_0, x_1, x_2, x_3\}$ を

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_1(x_0) &= 00 \\ \mathcal{E}_1(x_1) &= 01 \\ \mathcal{E}_1(x_2) &= 10 \\ \mathcal{E}_1(x_3) &= 11 \end{aligned}$$

と符号化すると，各情報源の出現確率に関係なく，平均符号長は 2 である．しかし，情報源の確率が

$$\begin{aligned} \Pr\{X = x_0\} &= \frac{1}{2} \\ \Pr\{X = x_1\} &= \frac{1}{4} \\ \Pr\{X = x_2\} &= \frac{1}{8} \\ \Pr\{X = x_3\} &= \frac{1}{8} \end{aligned}$$

となる場合，符号器

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_2(x_0) &= 0 \\ \mathcal{E}_2(x_1) &= 01 \\ \mathcal{E}_2(x_2) &= 011 \\ \mathcal{E}_2(x_3) &= 111 \end{aligned}$$

の平均符号長は

$$\bar{L}_2 = \frac{1}{2} \times 1 + \frac{1}{4} \times 2 + 2 \times \frac{1}{8} \times 3 = \frac{7}{4}$$

となり，符号器 $\mathcal{E}_1$ よりさらに効率よくなる．

情報源符号化は復号後に歪みがあるかによって，無歪み符号化と歪み符号化に分類され，情報源の冗長度がない場合，0 と 1 は独立で出現確率は同じになる．

2.4　暗号化/暗号復号化

情報の安全性を必要とする通信システムでは，情報源の符号語に対して暗号化を実施する．初期の段階では，メッセージを送る人が鍵を作成し，安全な通信路を通じて受け取り側に鍵情報を渡した．

例 3. シフト暗号は，平文の英文字を k 個ずらした文字を送る方法である．例えば，$k = 2$ のシフト暗号で *HELLO* を暗号化すると *JGNNQ* になる．

英文字の順序
A B C D E F G H I J K L M N O P Q R S T U V W X Y Z

このように，送信側と受信側が鍵を密かに共有する暗号化方式を秘密鍵暗号と呼ぶが，秘密鍵暗号は鍵の伝送途中漏れる可能性がある上，頻度解析などで鍵が破れるリスクがある．

それで，1970 年代に開発されたのが，SSH などで使われている公開鍵暗号である．公開鍵暗号では，メッセージを受け取る側が公開鍵（錠）と秘密鍵（鍵）を作り，公開鍵は誰にでも公開する．メッセージを受け取るには秘密鍵が必要となるが，その鍵は公開鍵からは計算できない仕組である [5].

2.5　通信路符号化/復号化

情報源符号語もしくは暗号文は，その後通信路符号化を行うが，その目的は入力されたビット列に組織的に冗長度を加えることで，雑音や干渉への耐性を強めることである．

例 4. 通信路符号器に入力されるのは，ビット列であることから，入力された *0* か *1* を奇数回繰り返す繰り返し符号を考える．

1. 0 が現れたら (000) を, 1 が現れたら (111) を出力する．

2. 0 が現れたら (00000) を, 1 が現れたら (11111) を出力する．

符号化される前は雑音の影響で 0 が 1 に受信されたら，判定誤りを引き起こすが，*1.* の *3* 回繰り返し符号の場合，雑音の影響で (000) が (010) と受信された場合には多数決で送信ビットが 0 であ

ると判定できる．送信ビットを *5* 回繰り返す *2.* の場合には，訂正できる符号語ビット数が 2 ビットに増える．

情報ビット k ビットを n ビット，$n \geq k$，の符号語に変換した場合，取り入れた冗長度は符号化レート k/n で評価できる．一般的に，符号化レートが低いほど雑音に強くなるが情報ビットの伝送速度は遅くなる．

2.6　変調/復調

符号化されたデータは，変調器で通信路の上で伝搬しやすい形に変換され，通信路を通じて伝送される．実際のほぼすべての通信は電気/電磁波信号で行われているため，変調の主要な目的はビット列を電気信号の波形に変換することである．例えば，通信路符号器から 0 が出力されたら波形 $s_0(t)$ を送信し，1 が出力された場合には $s_1(t)$ を送信する．このような，符号語の各ビットを単独に通信路で送信される方式を二値変調と呼ぶ．一方，変調器は $M = 2^Q$ 個の異なる波形 $s_i(t), i = 0, 1, \cdots, .M - 1, M > 2$ を用いて一回に Q ビットの符号語列を送信することもできるがこのような方式は多値変調と呼ぶ.

通信路はそれぞれ通しやすい周波数があり，信号は基本的に正弦波（余弦波）

$$s(t) = A\cos(ft + \theta) \tag{2.1}$$

の形式で通信路に送信されるが，(2.1) が振幅，周波数，位相の変数を持つことから変調方式も振幅変調，周波数変調，位相変調及び正弦波と余弦派の変数を組み合わせた直行振幅変調 (QAM) 方式などが存在する．

2.7　多重化/逆多重化

複数のユーザが同一の通信路を通じて通信を行うとき，情報を希望の相手に届けるためには多重化が必要となる．携帯電話の場合，第一世代のアナログ通信で使われた FDMA 方式では，周波数を同時に通信するユーザに重複なしに割り当て，受信機でフィルタを用いることで希望信号を取り出した．第二世帯からデジタル通信方式となるが，最初に使われた TDMA 通信方式では，通信路を使用する時間を複数のスロットに分割して各ユーザに割り当てることでユーザ間の干渉を抑制した．その後に登場した CDMA と呼ばれる第三世代通信方式では，ユーザを区別するために拡散系列と呼ばれる符号を割り当てたが，ユーザ間干渉を完全に抑えることが困難のことから現在の第四世帯では直行周波数分割 (OFDM) 方式と呼ばれるシステムが採用されている．

2.8　通信路

信号が送信機から受信機に伝わるに必要な電話線，同軸ケーブル，電磁波，光ファイバーなどの物理的な媒体を通信路と呼ぶ．これらの通信路の共通な特性は雑音の影響を受けることである．その原因は，受信機の熱雑音，人為的な妨害，大気雑音など様々であるが，どちらも固定の値を持たず，ランダム性を

持つ．

雑音の他にも，通信路は帯域制限があるため送信された信号は歪んでしまう場合が多く，高速移動時にはドップラー効果により、事変性をもつ厳しい通信環境となる．

通信システムの特徴を簡潔に記述する数学モデルでよく使われているのは次の三つである．

加法性雑音通信路

最も簡単な通信路は図 2.3 で示した送信信号 $s(t)$ に可能性ランダム雑音 $n(t)$ が加わったものである．物理的に，加法性雑音は受信機の電子装置と増幅器などから入るが，電子装置に起因する雑音

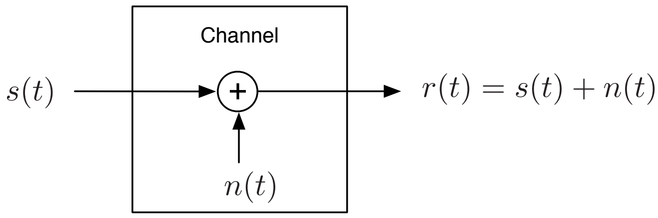

図 2.3　AWGN 通信路

は熱雑音の特性を持つ．統計的に熱雑音はガウス過程に属するので，この種の通信路を加法性ガウス雑音通信路と呼ぶ．

線形フィルタ通信路

電話線などの物理的な通信路ではユーザ間干渉を防ぐために，信号の送信時にフィルタを用いる．このような通信路は図 2.4 で示した加法性雑音を伴う線形フィルタ通信路となる故に，入力信号 $s(t)$ に対して，出力信号は

$$\begin{aligned} r(t) &= s(t) * c(t) + n(t) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} c(\tau) s(t-\tau) d\tau + n(t) \end{aligned} \tag{2.2}$$

となる．ここで，$c(t)$ は線形フィルタのインパルス応答で $*$ は畳み込みを示す．

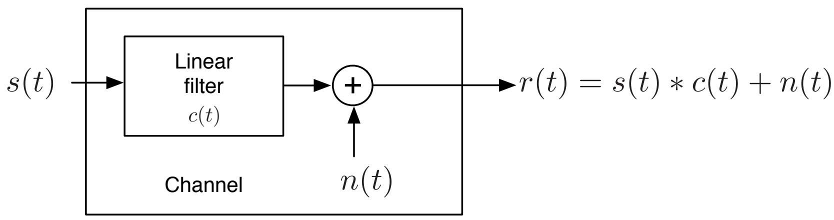

図 2.4　加法性雑音を伴う線形フィルタ通信路

線形時変フィルタ通信路

水中や電離層などを介した信号は時変多重反射の影響を受けるので，この種の通信路は線形時変フィルタと等価である．フィルタのインパルス応答を $c(\tau; t)$ で表すと，これは時間 t における時刻 $t-\tau$ のインパルスに起因する応答である．図 2.5 で示す加法性雑音を伴う線形時変フィルタ通信

路で，入力信号 $s(t)$ に対する通信路出力は

$$
\begin{aligned}
r(t) &= s(t) * c(\tau; t) + n(t) \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} c(\tau; t) s(t-\tau) d\tau + n(t)
\end{aligned}
\tag{2.3}
$$

となる．

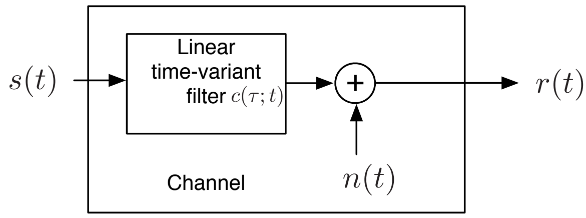

図 2.5　加法性雑音を伴う線形時変フィルタ通信路

電離層や移動通信での通信路は，(2.3) の特殊な場合で

$$
c(\tau; t) = \sum_{k=1}^{L} a_k(t) \delta(\tau - \tau_k) \tag{2.4}
$$

となる．ここで $\{a_k(t)\}$ と $\{\tau_k\}$ はそれぞれ，L 個のパスの中の k 番目のパスの振幅と遅延を表す．この場合，(2.4) を (2.3) に代入し

$$
r(t) = \sum_{k=1}^{L} a_k(t) s(t - \tau_k) + n(t) \tag{2.5}
$$

が得られる．

演習問題

1. アナログ電気信号を伝送する現代デジタル通信システムの構成と各部分の役割を説明せよ．
2. デジタル通信システムにおいて
   (a) 標本化定理の内容について述べよ．
   (b) 量子化の必要性を述べよ．
   (c) 情報源符号化の目的を述べよ．

参考文献

[1] H. Nyquist, “Certain factors affecting telegraph speed,” *Bell Syst. Tech. J.*, vol. 3, p. 324.

[2] H. Nyquist, “Certain topics in telegraph transmission theory,” *AIEE Trans.*, vol. 47, pp. 617-644.

[3] Amir D. Aczer, *The Mystery of the Aleph: Mathematics, the Kabbalah, and the Human Mind*, Washington Square Press, Revised Ed., 2001. 青木薫訳, 「無限」に魅入られた天才数学者たち, 早川書房, 2002.

[4] 韓太舜，小林欣吾, 情報と符号化の数理, 岩波書店（現代応用数学講座）, 1994.

[5] Simon Singh, *The Code Book: The Secret History of Codes and Code-breaking*, Fourth Estate Ltd, 2000. 青木薫訳, 暗号解読 (上, 下), 新潮文庫, 2007.

第 3 章

確率

一枚のコインを N 回投げ，表が出た回数 f_N を数えると，N が大きくなるにつれて，f_N/N は一つの値 0.5 に近づいていく．フォン・ミーゼス（1882-1953）はその収束先をもって，確率を次のように定義した．

確率の頻度概念

定義 1. 同一の条件で，繰り返し実験が可能なときに，当該事象 $\mathbb{E}$ に対する相対度数 f_N が，N が大きくしたときに一定値に収束するならば，その値をもって当該の事象の確率

$$P = \lim_{n\to\infty} f_N/N$$

を与える．

3.1 標本空間と事象

サイコロを投げる実験のように，結果がランダムに起きるような実験を**試行**もしくは**ランダムな実験**と呼び，試行の結果生じうる個々の結果を**標本点**もしくは**根元事象**と呼び ω で表す．標本点の全体の空間を**標本空間**と呼び Ω で表す．

例 5. 上記の例では，各標本点に番号をつけ，ω_i=(i の目) とおくと，標本空間は

$$\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4, \omega_5, \omega_6\}$$

となる．

サイコロを投げて出た目が偶数である確率を求める場合，標本点の集まりを

$$\mathbb{E} = \{\omega_2, \omega_4, \omega_6\} \tag{3.1}$$

とおくと，この $\mathbb{E}$ は，“偶数の目が出た” という事象を表す．実験の結果，$\mathbb{E}$ の中の標本点が生じれば，

事象 $\mathbb{E}$ が起きたという．このように，ある性質をもったいくつかの標本点の集合を**事象**と呼ぶ．空集合 $\emptyset$ は**空事象**とよび，Ω は**全事象**と呼ぶ．

和事象, 積事象, 補事象, 差事象

定義 2. 標本空間 Ω での 2 つの事象 $\mathbb{E}$，$\mathbb{F}$ に対して，次のような事象を定義する．

和事象 $(\mathbb{E} \cup \mathbb{F})$**：** 事象 $\mathbb{E}$ もしくは $\mathbb{F}$ の標本点のどれかが生じたときに和事象が生じたという．

積事象 $(\mathbb{E} \cap \mathbb{F})$**：** 事象 $\mathbb{E}$ と $\mathbb{F}$ の両方に属する標本点が生じたときに積事象が生じたという．

補事象 $(\bar{\mathbb{E}})$**：** 事象 $\mathbb{E}$ に属しない標本点の集まりを $\bar{\mathbb{E}}$ と書き，$\mathbb{E}$ の補事象という．

補事象に関しては次のことが成り立つ．

- $\mathbb{E} \cup \bar{\mathbb{E}} = \Omega$
- $\mathbb{E} \cap \bar{\mathbb{E}} = \emptyset$
- $\bar{\bar{\mathbb{E}}} = \mathbb{E}$

差事象 $(\mathbb{E} \backslash \mathbb{F})$**：** 事象 $\mathbb{E}$ に属し，$\mathbb{F}$ には属さない標本点の集まりを差事象とよぶ．

上の定義より演算の順序に関する結合律と分配率が確かめられる．

- 結合律

$$(\mathbb{E}_1 \cup \mathbb{E}_2) \cup \mathbb{E}_3 = \mathbb{E}_1 \cup (\mathbb{E}_2 \cup \mathbb{E}_3)$$
$$(\mathbb{E}_1 \cap \mathbb{E}_2) \cap \mathbb{E}_3 = \mathbb{E}_1 \cap (\mathbb{E}_2 \cap \mathbb{E}_3)$$

- 分配律

$$(\mathbb{E}_1 \cup \mathbb{E}_2) \cap \mathbb{F} = (\mathbb{E}_1 \cap \mathbb{F}) \cup (\mathbb{E}_2 \cap \mathbb{F})$$
$$(\mathbb{E}_1 \cap \mathbb{E}_2) \cup \mathbb{F} = (\mathbb{E}_1 \cup \mathbb{F}) \cap (\mathbb{E}_2 \cup \mathbb{F})$$

例 6. 次の法則を証明せよ．

$$\overline{\mathbb{E}_1 \cup \mathbb{E}_2} = \bar{\mathbb{E}}_1 \cap \bar{\mathbb{E}}_2$$

証明*:*
$\omega \in \overline{\mathbb{E}_1 \cup \mathbb{E}_2}$ とすれば，$\omega \in \bar{\mathbb{E}}_1$ かつ $\omega \in \bar{\mathbb{E}}_2$ なので，$\omega \in \bar{\mathbb{E}}_1 \cap \bar{\mathbb{E}}_2$ である．したがって，$\overline{\mathbb{E}_1 \cup \mathbb{E}_2} \subset \bar{\mathbb{E}}_1 \cap \bar{\mathbb{E}}_2$ である．逆も同様に言えるので，左辺と右辺の集合は一致する．

3.2 確率

事象 $\mathbb{E}$ の起こりやすさを $\Pr\{\mathbb{E}\}$ と書き，$\mathbb{E}$ の起きる確率という. 尺度 $\Pr\{\mathbb{E}\}$ は次の性質を満たす．

確率

定義 3. 次の公理（コルモゴロフの公理）を満たす $\Pr\{\ \}$ を確率という．

1. 任意の事象 $\mathbb{E}$ に対して,$0 \leq \Pr\{\mathbb{E}\} \leq 1$
2. 全事象 Ω に対して,$\Pr\{\Omega\} = 1$
3. 共通の標本ない事象 $\mathbb{E}$,$\mathbb{F}$ に対して,$\Pr\{\mathbb{E} \cup \mathbb{F}\} = \Pr\{\mathbb{E}\} + \Pr\{\mathbb{F}\}$

コルモゴロフの公理から次の性質が導かれる．

- 任意の事象 $\mathbb{E}$ に対して,$\Pr\{\mathbb{E}\} + \Pr\{\bar{\mathbb{E}}\} = 1$
- 任意の事象 $\mathbb{E}$,$\mathbb{F}$ に対して,$\Pr\{\mathbb{E}\} = \Pr\{\mathbb{E} \cap \mathbb{F}\} + \Pr\{\mathbb{E} \cap \bar{\mathbb{F}}\}$
- $\mathbb{E} \subset \mathbb{F}$ のとき,$\Pr\{\mathbb{E}\} \leq \Pr\{\mathbb{F}\}$
- 任意の事象 $\mathbb{E}$,$\mathbb{F}$ に対して,$\Pr\{\mathbb{E} \cup \mathbb{F}\} = \Pr\{\mathbb{E}\} + \Pr\{\mathbb{F}\} - \Pr\{\mathbb{E} \cap \mathbb{F}\}$

条件付確率

定義 4. 事象 $\mathbb{E}$,$\mathbb{F}$ に対して,$\Pr\{\mathbb{F}\} \neq 0$ のとき

$$\Pr\{\mathbb{E}|\mathbb{F}\} = \frac{\Pr\{\mathbb{E} \cap \mathbb{F}\}}{\Pr\{\mathbb{F}\}} \tag{3.2}$$

で定義される $\Pr\{\mathbb{E}|\mathbb{F}\}$ を事象 $\mathbb{F}$ が起きる条件下での事象 $\mathbb{E}$ の条件付確率という．

定義式を書き直した

$$\Pr\{\mathbb{E} \cap \mathbb{F}\} = \Pr\{\mathbb{E}|\mathbb{F}\} \Pr\{\mathbb{F}\} = \Pr\{\mathbb{F}|\mathbb{E}\} \Pr\{\mathbb{E}\} \tag{3.3}$$

は**確率の積の公式**という．

独立事象

定義 5. 事象 $\mathbb{F}$ に事象 $\mathbb{E}$ に関数する情報が含まれてないとき，つまり

$$\Pr\{\mathbb{E}|\mathbb{F}\} = \Pr\{\mathbb{E}\} \tag{3.4}$$

のとき，事象 $\mathbb{E}$ と $\mathbb{F}$ は**独立**であるという．

互いに独立な事象 $\mathbb{E}$,$\mathbb{F}$ に対して

$$\Pr\{\mathbb{E} \cap \mathbb{F}\} = \Pr\{\mathbb{E}\} \Pr\{\mathbb{F}\} \tag{3.5}$$

が成り立つ．

定理 2. 事象 $\mathbb{E}$ と $\mathbb{F}$ に対して，事象 $\mathbb{F}$ が起きる前の事象 $\mathbb{E}$ の確率 $\Pr\{\mathbb{E}\}$ を**事前確率**といい，事象 $\mathbb{F}$ が起きたあ後での事象 $\mathbb{E}$ の確率 $\Pr\{\mathbb{E}|\mathbb{F}\}$ を**事後確率**とよぶ．ベイズ定理によれば，事象 $\mathbb{F}$ の事後確率は

$$\Pr\{\mathbb{F}|\mathbb{E}\} = \frac{\Pr\{\mathbb{E}|\mathbb{F}\}\Pr\{\mathbb{F}\}}{\Pr\{\mathbb{E}\}} \tag{3.6}$$

で計算される．

例 7. 一日製品を *12* 個生産する機械 A と *16* 個生産する機械 B があるとし，製品の不良率がそれぞれ *5%* と *10%* であると仮定する. 不良品が見つかったとき, 機械 A からの製品である確率を求めよ.

【回答】

機械 A と B が生産した製品の集合をそれぞれ $\mathbb{E}_A$ 及び $\mathbb{E}_B$ とし、$\mathbb{F}$ を不良品の集合とする. $\mathbb{E}_A$ と $\mathbb{E}_B$ のサイズがそれぞれ $|\mathbb{E}_A| = 12$ と $|\mathbb{E}_B| = 16$ であることより，標本空間のサイズは $|\Omega| = |\mathbb{E}_A| + |\mathbb{E}_B| = 28$ であり

$$\left\{ \begin{array}{lcl} \Pr\{\mathbb{E}_A\} & = & \frac{|\mathbb{E}_A|}{|\Omega|} = \frac{3}{7} \\ \Pr\{\mathbb{E}_B\} & = & \frac{|\mathbb{E}_B|}{|\Omega|} = \frac{4}{7} \end{array} \right. \tag{3.7}$$

となる．一方、それぞれの不良率より

$$\left\{ \begin{array}{lcl} \Pr\{\mathbb{F}|\mathbb{E}_A\} & = & \frac{1}{20} \\ \Pr\{\mathbb{F}|\mathbb{E}_B\} & = & \frac{1}{10} \end{array} \right. \tag{3.8}$$

であるので

$$\Pr\{\mathbb{E}_A|\mathbb{F}\} = \frac{\Pr\{\mathbb{F}|\mathbb{E}_A\}\Pr\{\mathbb{E}_A\}}{\Pr\{\mathbb{F}\}} = \frac{\frac{3}{140}}{\Pr\{\mathbb{F}\}}$$

また，$\mathbb{E}_A \cup \mathbb{E}_B = \Omega$ かつ，$\mathbb{E}_A \cap \mathbb{E}_B = \emptyset$ より

$$\begin{aligned} \Pr\{\mathbb{F}\} &= \Pr\{\mathbb{F} \cap \mathbb{E}_A\} + \Pr\{\mathbb{F} \cap \mathbb{E}_B\} \\ &= \Pr\{\mathbb{F}|\mathbb{E}_A\}\Pr\{\mathbb{E}_A\} + \Pr\{\mathbb{F}|\mathbb{E}_B\}\Pr\{\mathbb{E}_B\} \\ &= \frac{1}{20} \times \frac{3}{7} + \frac{1}{10} \times \frac{4}{7} \\ &= \frac{11}{140} \end{aligned}$$

となる．故に不良品が機械 A から生産された製品である確率は

$$\Pr\{\mathbb{E}|\mathbb{F}\} = \frac{3}{11} = \approx 27.3\%$$

である。

3.3 確率変数

確率変数，分布関数

定義 6. 標本空間 Ω で定義された実数値関数 $X(\boldsymbol{\omega})$ を**確率変数**という．試行の結果 $\boldsymbol{\omega}$ が確定すると，確率変数 X は一つの値 $X(\boldsymbol{\omega}_i)$ に定まるが，この値を $X(\boldsymbol{\omega})$ の**実現値**という．任意の一次元区間 $\mathbb{I}=(a,b]$ において，事象

$$\mathbb{E}=\{\boldsymbol{\omega}|X(\boldsymbol{\omega})\in\mathbb{I}\}_{\boldsymbol{\omega}\in\Omega}$$

が生じる確率 $\Pr\{\mathbb{E}\}$ を確率変数 $X(\boldsymbol{\omega})$(記述の便宜上 X と記する) の**確率分布** といい，$\mathbb{I}=(-\infty,x]$ のときの確率関数

$$F_X(x):=\Pr\{X(\boldsymbol{\omega})\in(-\infty,x]\} \tag{3.9}$$

を X の**分布関数**とよぶ.

例 8. サイコロを５回投げる実験について考える．各回サイコロは $\{1,2,3,4,5,6\}$ のいずれの目が出るので，５回投げた結果の標本空間は

$$\Omega=\{(1,1,1,1,1),(1,1,1,1,2),\cdots,(6,6,6,6,6)\}$$

となる．このときに１の目が出る回数を変数 X を持って表すと，標本 $\boldsymbol{\omega}=(3,5,2,1,6)$ の実現値は $X=2$，標本 $\boldsymbol{\omega}=(5,1,3,1,2)$ の実現値は $X=2$ である.
このときに X のとり得る値は，$\mathcal{I}=\{0,1,2,3,4,5\}$ であり，*1* の目が n 回出る事象を考えると，$\mathbb{I}=\{n\},n\in\mathcal{I}$ となり，$\mathbb{E}$ が生じる確率は

$$\Pr\{\mathbb{E}\}={}_nC_5\left(\frac{1}{6}\right)^n\left(\frac{5}{6}\right)^{5-n}$$

である．また，分布関数は

$$F_X(x)=\sum_{n=0}^{\lfloor x\rfloor}{}_nC_5\left(\frac{1}{6}\right)^n\left(\frac{5}{6}\right)^{5-n}$$

で与えられる.

標本空間が離散的な場合, 標本空間が連続な場合および多変数の場合に分けて確率分布関数を定義する. 離散的な標本空間において, 確率変数 X のとり得る値が $x_1,x_2,\cdots$ と番号付けられるとき，X の**確率分布**は

$$P_X(x_i):=\Pr\{X=x_i\} \tag{3.10}$$

であり，任意の区間 $\mathbb{I}$ に対し

$$\Pr\{X \in \mathbb{I}\} = \sum_{i \in \mathbb{I}} P_X(x_i) \tag{3.11}$$

となる．

標本空間が連続な場合, 任意の一次元区間 $\mathbb{I} = (a, b]$ に対して

$$\Pr\{a \leq X \leq b\} = \int_a^b f_X(t)dt \leq 1 \tag{3.12}$$

となる関数 $f(t)$ を連続的な確率変数 X の**確率密度関数**という．このとき，分布関数は

$$F_X(x) = \Pr\{-\infty < X \leq x\} = \int_{-\infty}^{x} f_X(t)dt \tag{3.13}$$

で与えられる．

N 個の連続確率変数 $X_1, X_2, \cdots, X_N$ と対応する一次元区間 $\mathbb{I}_1, \mathbb{I}_2, \cdots, \mathbb{I}_N$ に対して

$$\begin{aligned}&\Pr\{X_1 \in \mathbb{I}_1, X_2 \in \mathbb{I}_2, \cdots, X_N \in \mathbb{I}_N\}\\ &= \int_{t_1 \in \mathbb{I}_1} \int_{t_2 \in \mathbb{I}_2} \cdots \int_{t_N \in \mathbb{I}_N} f_{X_1, X_2, \cdots, X_N}(t_1, t_2, \cdots, t_N) dt_1 dt_2 \cdots dt_N\end{aligned} \tag{3.14}$$

となる関数を変数 $X_1, X_2, \cdots, X_N$ の**同時確率密度関数**といい，**同時確率分布関数**は

$$\begin{aligned}&F_{X_1, X_2, \cdots, X_N}(x_1, x_2, \cdots, x_N)\\ &= \int_{-\infty}^{x_1} \int_{-\infty}^{x_2} \cdots \int_{-\infty}^{x_N} f_{X_1, X_2, \cdots, X_N}(t_1, t_2, \cdots, t_N) dt_1 dt_2 \cdots dt_N\end{aligned} \tag{3.15}$$

で与えられる．

確率変数の独立性

定義 7. 離散確率変数 X, Y において，すべての i, j に対して

$$P_{X,Y}(x_i, y_j) = P_X(x_i) P_Y(y_j) \tag{3.16}$$

が成り立つとき X と Y は**独立**であるといい，連続な場合にはすべての x, y に対して

$$p_{X,Y}(x, y) = p_X(x) p_Y(y) \tag{3.17}$$

が成り立つことをいう．

条件付分布

定義 8. 離散確率変数 X, Y に対して，$P_Y(y) \neq 0$ のとき

$$P_{X|Y}(x|y) := \Pr\{X = x | Y = y\} = \frac{P_{X,Y}(x, y)}{P_Y(y)} \tag{3.18}$$

を $Y = y$ が生じる条件のもとでの X の**条件付分布**という．連続確率変数の場合は，区間 $\Pr\{Y \in (y, y + dy]\} \neq 0$ のとき、条件付確率は，密度関数を用いて

$$\Pr\{X \in (x, x + dx] | Y \in (y, y + dy]\} = \frac{f_{X,Y}(x, y)dxdy}{f_Y(y)dy} = \frac{f_{X,Y}(x, y)dx}{f_Y(y)} \tag{3.19}$$

で計算される．

期待値と分散

定義 9. 離散確率変数 X の確率分布 $\{P_X(X_i)\}$ が与えられた時，期待値と分散はそれぞれ

$$E\{X\} := \sum_{i=1}^{\infty} x_i P_X(x_i) \tag{3.20}$$

$$V\{X\} := E\{(X - E\{X\})\} = \sum_{i=1}^{\infty} (x_i - E\{X\})^2 P_X(x_i) \tag{3.21}$$

で与えられる．
連続の場合は

$$E\{X\} := \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x) dx \tag{3.22}$$

$$V\{X\} := E\left\{(X - E\{X\})^2\right\} = \int_{-\infty}^{\infty} (x - E\{X\})^2 f_X(x) dx \tag{3.23}$$

となる．

3.4 ガウス分布

ガウス分布，Q 関数

定義 10. 一次元**ガウス分布** *(***正規分布***)* の確率密度関数は，期待値 $\mu \in \mathbb{R}$ と分散 $\sigma > 0$ を用いて

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \tag{3.24}$$

で与えられ，便宜のためしばしば $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ で表される．特に期待値と分散が，$\mu = 0$ と $\sigma = 1$ になる正規分布は**標準正規分布**と呼ばれる．
標準正規分布に従う確率変数 X の値が x を超える累積確率

$$Q(x) = \Pr\{\mathcal{N}(0, 1) > x\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{x}^{\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} dt \tag{3.25}$$

を Q **関数**と呼ぶ．

Q 関数には次の性質は Q 関数の定義および対称性により明らかである．

- $Q(0) = \frac{1}{2}$
- $Q(\infty) = 0$
- $Q(-\infty) = 1$
- $Q(-x) = 1 - Q(x)$

ガウス確率変数の累積分布関数は，変数変換 $u = (t - \mu)/\sigma$ を用いて，Q 関数で表せる．

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}} dt$$

$$
\begin{aligned}
&= 1 - \int_{x}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}} dt \\
&= 1 - \int_{\frac{x-\mu}{\sigma}}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{u^2}{2}} du \\
&= 1 - Q\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)
\end{aligned}
$$

図 3.1 はガウス確率変数の確率密度関数および累積分布関数を示している．

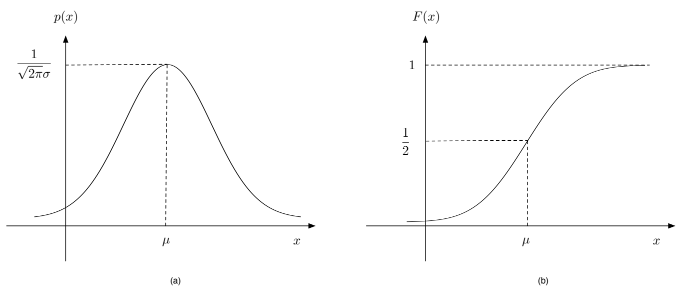

図 3.1　ガウス確率変数の確率密度関数および累積分布関数

Q 関数の具体的な値は表 3.1 及び 3.2 を参照せよ．

練習問題

1. $\Pr\{\mathbb{E}|\mathbb{F}\} < \Pr\{\mathbb{E}\}$ および $\Pr\{\mathbb{E}|\mathbb{F}\} > \Pr\{\mathbb{E}\}$ となる事象 $\mathbb{E}, \mathbb{F}$ の例について述べよ．
2. ある機械を製造するメーカ A, B, C のマーケットセアはそれぞれ 20%,30%,50% で，初年度故障率はそれぞれ 5%, 20%, 15% であるとする．
   (a) この機械の初年度故障率を求めよ．
   (b) ある機械が初年度に故障した場合，この機械がメーカ A が製造した確率を求めよ．
3. ある信号の振幅に期待値 0，分散 10^{-8} のガウス雑音が加わったと仮定する．
   (a) 雑音の振幅が 10^{-4} を超える確率を求めよ．
   (b) 雑音の振幅が 4×10^{-4} を超える確率を求めよ．
   (c) 振幅が $[-2 \times 10^{-4} \quad 10^{-4}]$ となる雑音が発生する確率を求めよ．
   (d) 雑音の値が正である場合，その振幅が 10^{-4} を超える確率を求めよ．

表 3.1　Q 関数の値

x	$Q(x)$	x	$Q(x)$	x	$Q(x)$	x	$Q(x)$
0	5.0000×10^{-1}	1.8	3.5930×10^{-2}	3.6	1.59×10^{-4}	5.4	3.3320×10^{-8}
0.1	4.6017×10^{-1}	1.9	2.8717×10^{-2}	3.7	1.08×10^{-4}	5.5	1.8990×10^{-8}
0.2	4.2074×10^{-1}	2	2.2750×10^{-2}	3.8	7.2348×10^{-5}	5.6	1.0718×10^{-8}
0.3	3.8209×10^{-1}	2.1	1.7864×10^{-2}	3.9	4.8096×10^{-5}	5.7	5.9904×10^{-9}
0.4	3.4458×10^{-1}	2.2	1.3903×10^{-2}	4	3.1671×10^{-5}	5.8	3.3157×10^{-9}
0.5	3.0854×10^{-1}	2.3	1.0724×10^{-2}	4.1	2.0658×10^{-5}	5.9	1.8175×10^{-9}
0.6	2.7425×10^{-1}	2.4	8.198×10^{-3}	4.2	1.3346×10^{-5}	6.0	9.8659×10^{-10}
0.7	2.4196×10^{-1}	2.5	6.210×10^{-3}	4.3	8.5399×10^{-6}	6.1	5.3034×10^{-10}
0.8	2.1186×10^{-1}	2.6	4.661×10^{-3}	4.4	5.4125×10^{-6}	6.2	2.8232×10^{-10}
0.9	1.8406×10^{-1}	2.7	3.467×10^{-3}	4.5	3.3977×10^{-6}	6.3	1.4882×10^{-10}
1.0	1.5866×10^{-1}	2.8	2.555×10^{-3}	4.6	2.1125×10^{-6}	6.4	7.7689×10^{-11}
1.1	1.3567×10^{-1}	2.9	1.866×10^{-3}	4.7	1.3008×10^{-6}	6.5	4.0160×10^{-11}
1.2	1.1507×10^{-1}	3.0	1.350×10^{-3}	4.8	7.9333×10^{-7}	6.6	2.0558×10^{-11}
1.3	9.6800×10^{-2}	3.1	9.68×10^{-4}	4.9	4.7918×10^{-7}	6.7	1.0421×10^{-11}
1.4	8.0757×10^{-2}	3.2	6.87×10^{-4}	5.0	2.8665×10^{-7}	6.8	5.2309×10^{-12}
1.5	6.6807×10^{-2}	3.3	4.83×10^{-4}	5.1	1.6983×10^{-7}	6.9	2.6001×10^{-12}
1.6	5.4799×10^{-2}	3.4	3.37×10^{-4}	5.2	9.9644×10^{-8}	7.0	1.2799×10^{-12}
1.7	4.4565×10^{-2}	3.5	2.33×10^{-4}	5.3	5.7901×10^{-8}	7.1	6.2378×10^{-13}

表 3.2　よく使う Q 関数の値

$Q(x)$	x
10^{-1}	1.2816
10^{-2}	2.3263
10^{-3}	3.0902
10^{-4}	3.7190
10^{-5}	4.2649
10^{-6}	4.7534
10^{-7}	5.1993
0.5×10^{-5}	4.4172
0.25×10^{-5}	4.5648
0.667×10^{-5}	4.3545

参考文献

[1] A. N. コルモゴロフ (著), 坂本 實 (翻訳), 確率論の基礎概念, ちくま学芸文庫, 2010.