# 演習問題6

変数分離法を用いて二次元ラプラス方程式

$$\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y^2} = 0$$

の $f(x,y) = f_x(x) f_y(y)$ の形の解を求め，境界条件

$$\lim_{x\to\infty} f(x,y) = 0,\ f(x,0) = f(x,L) = 0$$

を満たすものを導け．(ヒント：$\lim_{x\to\infty} f(x,y) = 0$ になるには、$f_x(x)$ が指数関数の結合 $f_x(x) = \alpha_1 e^{\omega x} + \alpha_2 e^{-\omega x}$ の形式になり、かつ $\alpha_1 = 0$ とならなければならない)

【解答例】

$$f(x,y) = f_x(x) f_y(y)$$

とおくと，方程式は

$$f_y(y)\frac{d^2 f_x(x)}{dx^2} + f_x(x)\frac{d^2 f_y(y)}{dy^2} = 0$$

となるので，ある定数 $\mu$ に対して連立方程式

$$\left\{\begin{array}{rcl} \frac{d^2 f_x(x)}{dx^2} + \mu f_x(x) & = & 0 \\ \frac{d^2 f_y(y)}{dy^2} - \mu f_y(y) & = & 0 \end{array}\right.$$

が成り立つ．

上記の連立常微分方程式において，$f_x(x)$ に関する方程式の特性方程式は

$$\lambda^2 + \mu = 0$$

となるので，$\omega = \sqrt{|\mu|}$ とした場合，$\mu$ の符号によって $f_x(x)$ 以下の形式となる

$$\begin{cases} \alpha_1 e^{\omega x} + \alpha_2 e^{-\omega x} & \mu < 0 \\ \alpha_1 + \alpha_2 x & \mu = 0 \\ \alpha_1 \cos\omega x + \alpha_2 \sin\omega x & \mu > 0 \end{cases} \tag{1}$$

(1) の解の形式から，$f_x(x) = 0$ 以外 [1] に，境界条件 $\lim_{x\to\infty} f(x,y) = 0$ を満たすためには、$f_x(x) = \alpha_1 e^{\omega x} + \alpha_2 e^{-\omega x}$ の形式で、かつ $\alpha_1 = 0$ の場合である．つまり，$\mu < 0$ の場合である．

$\mu < 0$ で，$f_y(0) = f_y(L) = 0$ の境界条件を満たすには

$$\mu = \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2,\quad n = 1, 2, \cdots$$

[1] この場合には明らかな解 $f(x,y) = 0$ となる．

の場合なので $\alpha_2 = 1$,$n = 1$ とした関数

$$f(x,y) = e^{-\frac{\pi}{L}x} \sin \frac{\pi}{L} y$$

は与えられたラプラス方程式と境界条件を満たす.

$$f(x,y) = e^{-\omega x}(\cos \omega)$$