演習問題5

1. 時刻 $t=0$ に，抵抗 R, コイル L およびコンデンサ C が電源 E と直列した回路のスイッチを on にしたと仮定する．時刻 t でのコンデンサーの電荷を $Q(t)$ とおいた時，$Q(t)$ が満たす微分方程式を求めよ．

   【回答例】

   回路の電流を $I(t)$ とすると、直列回路でのキルヒホッフの電圧の法則により

   $$RI(t)+L\frac{dI(t)}{dt}+\frac{Q(t)}{C}=E(t)$$

   が成り立つ．一方，電流は

   $$I(t)=\frac{Q(t)}{dt}$$

   となるので，上の式に代入すると

   $$L\frac{d^2Q(t)}{dt^2}+R\frac{dQ(t)}{dt}+\frac{Q(t)}{C}=E(t)$$

   となる．

2. $\tan^{-1}x$ の導関数を求め，微分方程式

   $$xdf(x)=[x^2+f^2(x)+f(x)]dx$$

   を解け．

   【回答例】

   $y=\tan^{-1}x$ とおくと，$x=\tan y$ である．y の導関数は

   $$\frac{dy}{dx}=\left(\frac{dx}{dy}\right)^{-1}$$

   と書けるが，ここで

   $$\begin{aligned}\frac{dx}{dy} &= \frac{1}{\cos^2 y}\\ &= \frac{\sin^2 y+\cos^2 y}{\cos^2 y}\\ &= \tan^2 y+1\\ &= x^2+1\end{aligned}$$

   となる．故に，$\tan^{-1}x$ の導関数は $\frac{1}{x^2+1}$ である．

$f(x) = xu(x)$ とおくと，上の方程式は

$$\begin{aligned} & xu(x)dx + x^2 du(x) = [x^2 + x^2 u^2(x) + xu(x)]dx \\ \Rightarrow \quad & du(x) = [1 + u^2(x)]dx \\ \Rightarrow \quad & \frac{1}{1+u^2(x)} du(x) = dx \end{aligned}$$

両辺を積分すると

$$\tan^{-1} u(x) = x + \alpha$$

となり

$$f(x) = x \tan(x + \alpha)$$

である.

3. 次の微分方程式を解け.

(a)

$$xf(x)(1+x^2)\frac{df(x)}{dx} = 1 - f^2(x)$$

【回答例】

$$\begin{aligned} & xf(x)(1+x^2)\frac{df(x)}{dx} = 1 - f^2(x) \\ \Rightarrow \quad & \frac{f(x)}{1-f^2(x)} df(x) = \frac{1}{x(1+x^2)} dx \\ \Rightarrow \quad & \frac{f(x)}{1-f^2(x)} df(x) = \left(\frac{1}{x} - \frac{x}{1+x^2}\right) dx \end{aligned}$$

両辺を積分すると

$$\frac{1}{2} \ln |f^2(x) - 1| = \frac{1}{2} \ln(x^2+1) - \ln|x| + \alpha$$

となるので

$$f^2(x) - 1 = \pm e^{2\alpha} \left(1 + \frac{1}{x^2}\right)$$

となる．$\beta = e^{2\alpha}$ とおくと

$$f^2(x) = 1 \pm \beta \left(1 + \frac{1}{x^2}\right)$$

より

$$f(x) = \pm \sqrt{1 \pm \beta \left(1 + \frac{1}{x^2}\right)}$$

である.

(b)

$$x\frac{df(x)}{dx} + f(x) = x(1-x^2)$$

【回答例】

対応する同次方程式

$$\frac{1}{f(x)}df(x) = -\frac{1}{x}dx$$

の一般解は

$$f(x) = \frac{\alpha}{x}$$

なので

$$f(x) = \frac{\alpha(x)}{x}$$

とおくと

$$\frac{df(x)}{dx} = \frac{d\alpha(x)}{xdx} - \frac{\alpha(x)}{x^2}$$

上の微分方程式は

$$\frac{d\alpha(x)}{xdx} = x(1-x^2)$$

となり

$$\alpha(x) = \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{4} + \beta$$

が成り立つ．故に

$$f(x) = \frac{\alpha(x)}{x} = \frac{x}{2} - \frac{x^3}{4} + \frac{\beta}{x}$$

である．