演習問題4

1. $\boldsymbol{r} = (x, y, z)$, $r = |\boldsymbol{r}|$, とした時，ガウスの発散定理より，半径 a の球面 $\mathbb{S}$ の内部領域 $\mathcal{V}$ にたいして
$$\iiint_{\mathcal{V}} \frac{1}{r^2} d\mathcal{V} = 4\pi a$$
が成り立つことを示せ.

   【回答例】

   $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ であるので
$$\boldsymbol{f} = \frac{\boldsymbol{r}}{r^2} = \frac{(x, y, z)}{x^2 + y^2 + z^2}$$
とおくと
$$\frac{\partial f_x}{\partial x} = \frac{1}{x^2 + y^2 + z^2} - \frac{2x^2}{(x^2 + y^2 + z^2)^2}$$
$$\frac{\partial f_y}{\partial y} = \frac{1}{x^2 + y^2 + z^2} - \frac{2y^2}{(x^2 + y^2 + z^2)^2}$$
$$\frac{\partial f_z}{\partial z} = \frac{1}{x^2 + y^2 + z^2} - \frac{2z^2}{(x^2 + y^2 + z^2)^2}$$
より
$$\nabla \cdot \boldsymbol{f} = \frac{1}{x^2 + y^2 + z^2} = \frac{1}{r^2}$$
が成り立つ．故に，上の積分は $\iiint_{\mathcal{V}} \nabla \cdot \boldsymbol{f} d\mathcal{V}$ と書き換えられ，ガウスの発散定理を適応すると
$$\iiint_{\mathcal{V}} \nabla \cdot \boldsymbol{f} d\mathcal{V} = \iint_{\mathbb{S}} \boldsymbol{f} \cdot d\boldsymbol{S} = \iint_{\mathbb{S}} \frac{\boldsymbol{r}}{r^2} \cdot d\boldsymbol{S}$$
が得られるが，球の面素ベクトルと半径の方向が一致するので，球の表面積の公式を利用すると
$$\iint_{\mathbb{S}} \frac{\boldsymbol{r}}{r^2} \cdot d\boldsymbol{S} = \frac{1}{a} \iint_{\mathbb{S}} d\mathbb{S} = 4\pi a$$
となる.

2. ベクトル場 $\boldsymbol{f} = (x^2 + y, x^2 + 2z, 2y)$ に対して，ストークス定理を利用して xy 平面上の円 $C : x^2 + y^2 = 4$ に沿っての線積分を求めよ.

   【回答例】
$$\nabla \times \boldsymbol{f} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{e}_x & \boldsymbol{e}_y & \boldsymbol{e}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ x^2 + y & x^2 + 2z & 2y \end{vmatrix} = (0, 0, 2x - 1)$$

なので，ストークス定理を用いると

$$\oint_C \boldsymbol{f} \cdot d\boldsymbol{c} = \iint_{\mathbb{S}} (0, 0, 2x-1) \cdot d\boldsymbol{S}$$

と書けるが，ここで $\boldsymbol{S}$ は，法線ベクトルが z 軸で，原点を中心とした半径 2 の円盤である．ベクトル $(0, 0, 2x-1)$ と $\boldsymbol{S}$ の法線ベクトルが一致するので上の式は

$$\iint_{\mathbb{S}} (2x-1) d\mathbb{S} = \iint_{\mathbb{S}} 2x d\mathbb{S} - \iint_{\mathbb{S}} d\mathbb{S}$$

であるが，対称性により第一項は 0 であるので，線積分は円盤の面積により

$$-\iint_{\mathbb{S}} d\mathbb{S} = -4\pi$$

となる．

3. スカラー値関数 f，g に対して，$\boldsymbol{h} = f\nabla g$ とおくと，$\boldsymbol{h} \cdot (\nabla \times \boldsymbol{h}) = 0$ が成り立つことを示せ．

【回答例】

$\boldsymbol{f} = \nabla f$，$\boldsymbol{g} = \nabla g$ とおくと、$\boldsymbol{h} = f\boldsymbol{g}$ なので

$$\nabla \times \boldsymbol{h} = \nabla \times (f\boldsymbol{g}) = \nabla f \times \boldsymbol{g} + f(\nabla \times \boldsymbol{g}) = \boldsymbol{f} \times \boldsymbol{g} + f(\nabla \times \boldsymbol{g})$$

で表せる．ここで，第二項は

$$\nabla \times \boldsymbol{g} = \nabla \times (\nabla g) = \boldsymbol{0}$$

より $\boldsymbol{0}$ となるので

$$\boldsymbol{h} \cdot (\nabla \times \boldsymbol{h}) = f\boldsymbol{g} \cdot (\boldsymbol{f} \times \boldsymbol{g}) = f[\boldsymbol{f} \cdot (\boldsymbol{g} \times \boldsymbol{g})] = f(\boldsymbol{f} \cdot \boldsymbol{0}) = 0$$

となる．