演習問題3

提出期限：10 月 12 日（木）
提出場所：西２号館１階の韓当てレポート提出箱（３番）

1. 次の接線線積分を求めよ.

   (a) ベクトル場 $\boldsymbol{f} = (x^2, y^2, z^2)$, 曲線 $C : (\cos u, \sin u, u)_{u=0}^{\pi/2}$
   【回答例】

$$\begin{aligned} &\int_C \boldsymbol{f} \cdot d\boldsymbol{c} \\ =& \int_0^{\pi/2} (\cos^2 u, \sin^2 u, u^2) \cdot (d\cos u, d\sin u, du) \\ =& \frac{1}{3}\left[\cos^3 u + \sin^3 u + u^3\right]_0^{\pi/2} = \frac{\pi^3}{24} \end{aligned}$$

   (b) ベクトル場 $\boldsymbol{f} = (y^2z^3, 2xyz^3, 3xy^2z^2)$, 曲線 $C : (u^2, u^4, u^6)_{u=0}^{1}$
   【回答例】
   $f = xy^2z^3$ とおくと、$\nabla f = (y^2z^3, 2xyz^3, 3xy^2z^2)$ となるので

$$\int_C \boldsymbol{f} \cdot d\boldsymbol{c} = [xy^2z^3]_{u=0}^1 = [u^{28}]_0^1 = 1$$

2. 平面 $\mathbb{S} : 2x + y + z = 2,\ x \geq 0,\ y \geq 0,\ z \geq 0$ におけるスカラー場 $f = x^2 + y - z$ の面積分を計算せよ.

   【回答例】

   $2x + y + z = 2$ より $z = 2 - 2x - y$ となるので、平面 $\mathbb{S} : (x, y, 2 - 2x - y)_{x=0,y=0}^{1,2-2x}$ で表せる。

$$\frac{\partial \boldsymbol{s}}{\partial x} = (1, 0, -2), \quad \frac{\partial \boldsymbol{s}}{\partial x} = (0, 1, -1), \quad \frac{\partial \boldsymbol{s}}{\partial x} \times \frac{\partial \boldsymbol{s}}{\partial x} = (2, 1, 1)$$

   より

$$\begin{aligned} \iint_{\mathbb{S}} f d\mathbb{S} &= \sqrt{6}\int_0^1 \int_0^{2-2x} (x^2 + 2y + 2x - 2) dy dx \\ &= \sqrt{6}\int_0^1 \left[y^2 + (x^2 + 2x - 2)y\right]_0^{2-2x} dx \\ &= 2\sqrt{6}\int_0^1 (1 - x)x^2 dx \\ &= 2\sqrt{6}\int_0^1 (x^2 - x^3) dx = \frac{1}{\sqrt{6}} \end{aligned}$$

3. ベクトル場 $\boldsymbol{f} = (x^2, y^2, z^2)$ の平面 $\mathbb{S} : 2x + 2y + z = 2,\ x \geq 0,\ y \geq 0,\ z \geq 0$ に沿っての面積分を計算せよ．ただし，平面 $\mathbb{S}$ の法単位ベクトルの向きは原点から遠ざかるように選ぶ.

【回答例】

平面 $\mathbb{S} : (x, y, 2(1-x-y))_{x=0,y=0}^{1,1-x}$ で表せる。

$$\frac{\partial \boldsymbol{s}}{\partial x} = (1, 0, -2), \quad \frac{\partial \boldsymbol{s}}{\partial x} = (0, 1, -2), \quad \frac{\partial \boldsymbol{s}}{\partial x} \times \frac{\partial \boldsymbol{s}}{\partial x} = (2, 2, 1)$$

より

$$\begin{aligned}
\iint_{\mathbb{S}} \boldsymbol{f} \cdot d\boldsymbol{S} &= \int_0^1 \int_0^{1-x} \left(x^2, y^2, 4(1-x-y)^2\right) \cdot (2, 2, 1) dy dx \\
&= \int_0^1 \int_0^{1-x} \left(6y^2 + 8(x-1)y + 6x^2 - 8x + 4\right) dy dx \\
&= \int_0^1 2(1-x)^3 + 4(x-1)^3 + (1-x)(6x^2 - 8x + 4) dx \\
&= \int_0^1 (-4x^3 + 8x^2 - 6x + 2) dx = \frac{2}{3}
\end{aligned}$$

4. 原点を中心とする半径 1 の級の内部領域を $\mathcal{V}$ とし，体積分

$$\iiint_{\mathcal{V}} (1+x) d\mathcal{V}$$

を計算せよ.

【回答例】

球座標系のヤコビアンは $|J| = r^2 \sin\theta$ で表せる。

$$\frac{\partial \boldsymbol{s}}{\partial x} = (1, 0, -2), \quad \frac{\partial \boldsymbol{s}}{\partial x} = (0, 1, -2), \quad \frac{\partial \boldsymbol{s}}{\partial x} \times \frac{\partial \boldsymbol{s}}{\partial x} = (2, 2, 1)$$

より

$$\begin{aligned}
\iiint_{\mathcal{V}} (1+x) d\mathcal{V} &= \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \int_0^1 (1 + r\sin\theta\cos\phi) r^2 \sin\theta dr d\theta d\phi \\
&= \frac{1}{3} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \sin\theta d\theta d\phi + \frac{1}{4} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \sin^2\theta \cos\phi d\theta d\phi \\
&= \frac{4\pi}{3}
\end{aligned}$$