演習問題2

1. $\boldsymbol{r} = (x, y, z)$, $r = |\boldsymbol{r}| \neq 0$ とおいて，次の問に答えよ．

   (a) スカラー場
   $$f(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{r^2}$$
   の勾配を求めよ．
   【回答例】
   $r = |\boldsymbol{r}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ より
   $$f(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{x^2 + y^2 + z^2}$$
   となるので
   $$\frac{\partial f}{\partial x} = -\frac{1}{(x^2 + y^2 + z^2)^2} 2x = -\frac{2x}{r^4}$$
   対称性より
   $$\frac{\partial f}{\partial y} = -\frac{2x}{r^4}, \quad \frac{\partial f}{\partial z} = -\frac{2z}{r^4}$$
   より
   $$\nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z} \right) = -\frac{2\boldsymbol{r}}{r^4}$$

   (b) ベクトル場
   $$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{r}) = \frac{\boldsymbol{r}}{r^3}$$
   の発散を求めよ．
   【回答例】
   $$f_x(\boldsymbol{r}) = \frac{x}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}$$
   より
   $$\begin{aligned} \frac{\partial f_x}{\partial x} &= \frac{x}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} \\ &= \frac{1}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} - \frac{3}{2} \frac{x \cdot 2x}{(x^2 + y^2 + z^2)^{5/2}} \\ &= \frac{x^2 + y^2 + z^2 - 3x^2}{(x^2 + y^2 + z^2)^{5/2}} \end{aligned}$$

対称性より

$$\frac{\partial f_y}{\partial y}=\frac{x^2+y^2+z^2-3y^2}{(x^2+y^2+z^2)^{5/2}},\quad \frac{\partial f_y}{\partial z}=\frac{x^2+y^2+z^2-3z^2}{(x^2+y^2+z^2)^{5/2}}$$

となるので

$$\nabla\cdot\boldsymbol{f}=\frac{\partial f_x}{\partial x}+\frac{\partial f_y}{\partial y}+\frac{\partial f_z}{\partial z}=0$$

(c) $\boldsymbol{\alpha}$, $\boldsymbol{\beta}$ を定ベクトルとし

$$\boldsymbol{\alpha}e^{j\boldsymbol{\beta}\cdot\boldsymbol{r}}$$

の回転を求めよ.

【回答例】

$e^{j\boldsymbol{\beta}\cdot\boldsymbol{r}}$ はスカラー値の関数なので

$$\nabla\times(\boldsymbol{\alpha}e^{j\boldsymbol{\beta}\cdot\boldsymbol{r}})=e^{j\boldsymbol{\beta}\cdot\boldsymbol{r}}(\nabla\times\boldsymbol{\alpha})+\nabla e^{j\boldsymbol{\beta}\cdot\boldsymbol{r}}\times\boldsymbol{\alpha}$$

ここで,$\boldsymbol{\alpha}$ は定ベクトルなので、$\nabla\times\boldsymbol{\alpha}=0$. また

$$\nabla e^{j\boldsymbol{\beta}\cdot\boldsymbol{r}}=e^{j\boldsymbol{\beta}\cdot\boldsymbol{r}}\nabla(j\boldsymbol{\beta}\cdot\boldsymbol{r})=e^{j\boldsymbol{\beta}\cdot\boldsymbol{r}}j\boldsymbol{\beta}$$

なので

$$\nabla\times(\boldsymbol{\alpha}e^{j\boldsymbol{\beta}\cdot\boldsymbol{r}})=je^{j\boldsymbol{\beta}\cdot\boldsymbol{r}}\boldsymbol{\beta}\times\boldsymbol{\alpha}$$

2. 3 次元スカラー場 $f(x,y,z)=xyz$ に，点 $o=(0,0,0)$, $a=(1,1,1)$, $b=(1,2,3)$ があるとする.

(a) 点 o と a を結ぶ線分 $C_1:(u,u,u)_{u=0}^1$ に沿った線積分を求めよ.

(b) 点 o と a を結ぶ線分 $C_2:(u^2,u^2,u^2)_{u=0}^1$ に沿った線積分を求めよ.

(c) 点 o と b を結ぶ線分 $C_3:(u,2u,3u)_{u=0}^1$ に沿った線積分を求めよ.

【回答例】

(a)

$$\int_0^1 u^3\cdot\sqrt{3}du=\frac{\sqrt{3}}{4}$$

(b)

$$\int_0^1 u^6\cdot 2u\cdot\sqrt{3}du=\frac{\sqrt{3}}{4}$$

(c)

$$\int_0^1 6u^3\cdot\sqrt{14}du=\frac{3\sqrt{14}}{2}$$