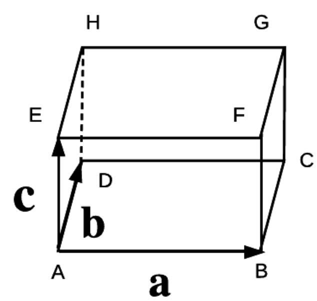
演習問題



1. $\overrightarrow{BH}$, $\overrightarrow{DF}$, $\overrightarrow{FC}$, $\overrightarrow{FH}$ を $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ で表わせよ.

   【回答例】

   各ベクトルの $\boldsymbol{a}$,$\boldsymbol{b}$,$\boldsymbol{c}$ での成分を考えると

$$\begin{aligned}\overrightarrow{BH} &= -\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}\\ \overrightarrow{DF} &= \boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}\\ \overrightarrow{FC} &= \boldsymbol{b}-\boldsymbol{c}\\ \overrightarrow{FH} &= -\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}\end{aligned}$$

   が成り立つ.

2. ベクトル $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ にたいして

$$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\times(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}) = -2(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})$$

   を示せ.

   【回答例】

$$\begin{aligned}& (\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\times(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})\\ =\ & \underbrace{\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{a}}_{\boldsymbol{0}}+\underbrace{\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a}}_{-\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}}-\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}+\underbrace{\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{b}}_{\boldsymbol{0}}\\ =\ & -2(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\end{aligned}$$

3. 頂点が $a(3,1,1)$, $b(-1,3,-1)$, $c(1,-1,4)$ となる三角形の面積ベクトルを求めよ.

   【回答例】

$\overrightarrow{ab} = (-4, 2, -2)), \overrightarrow{ac} = (-2, -2, 3)$ より，この 2 つのベクトルに囲まれる四辺形の面積ベクトルは

$$\overrightarrow{ab} \times \overrightarrow{ac} = (2, 16, 12)$$

となる．三角形の面積ベクトルは値が半分でベクトルの向きは変わらないので $(1, 8, 6)$ である．ちなみに，ベクトルの正の向きのとり方を除けば，この面積ベクトルは原点のとり方に依存しない．例えば，ベクトルを $\overrightarrow{ba} = (4, -2, -2)$，$\overrightarrow{bc} = (2, -4, 5)$ で計算すると

$$\frac{1}{2}\overrightarrow{ba} \times \overrightarrow{bc} = (-1, -8, -6)$$

となる．

4. $\boldsymbol{a}(u) = (2u^3, u^2, u)$, $\boldsymbol{b}(u) = (u, 0, 3u^2)$ のとき，$\dfrac{d[\boldsymbol{a}(u) \cdot \boldsymbol{b}(u)]}{du}$ 及び $\dfrac{d[\boldsymbol{a}(u) \times \boldsymbol{b}(u)]}{du}$ を求めよ．

【回答例】

$$\frac{d[\boldsymbol{a}(u)]}{du} = (6u^2, 2u, 1), \quad \frac{d[\boldsymbol{b}(u)]}{du} = (1, 0, 6u)$$

なので

$$\begin{aligned}
\frac{d[\boldsymbol{a}(u) \cdot \boldsymbol{b}(u)]}{du} &= \frac{d[\boldsymbol{a}(u)]}{du} \cdot \boldsymbol{b}(u) + \boldsymbol{a}(u) \cdot \frac{d[\boldsymbol{b}(u)]}{du} \\
&= (6u^2, 2u, 1) \cdot (u, 0, 3u^2) + (2u^3, u^2, u) \cdot (1, 0, 6u) \\
&= 8u^3 + 9u^2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{d[\boldsymbol{a}(u) \times \boldsymbol{b}(u)]}{du} &= \frac{d[\boldsymbol{a}(u)]}{du} \times \boldsymbol{b}(u) + \boldsymbol{a}(u) \times \frac{d[\boldsymbol{b}(u)]}{du} \\
&= (6u^2, 2u, 1) \times (u, 0, 3u^2) + (2u^3, u^2, u) \times (1, 0, 6u) \\
&= (12u^3, 30u^4 + 2u, -3u^2)
\end{aligned}$$

となる．