応用数学 B
中間試験問題

1. $\boldsymbol{f} = (y, -x, z)$, $\boldsymbol{g} = (y^2, x, 0)$ とし

$$\nabla \times (\boldsymbol{f} \times \boldsymbol{g}) = (\boldsymbol{g} \cdot \nabla)\boldsymbol{f} - (\boldsymbol{f} \cdot \nabla)\boldsymbol{g} + \boldsymbol{f}(\nabla \cdot \boldsymbol{g}) - \boldsymbol{g}(\nabla \cdot \boldsymbol{f})$$

が成り立つことを示せ.

【回答例】

左辺で

$$\boldsymbol{f} \times \boldsymbol{g} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{e}_x & \boldsymbol{e}_y & \boldsymbol{e}_z \\ y & -x & z \\ y^2 & x & 0 \end{vmatrix} = (-xz, y^2 z, xy + xy^2)$$

であるので

$$\nabla \times (\boldsymbol{f} \times \boldsymbol{g}) = \begin{vmatrix} \boldsymbol{e}_x & \boldsymbol{e}_y & \boldsymbol{e}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ -xz & y^2 z & xy + xy^2 \end{vmatrix} = (x + 2xy - y^2, -x - y - y^2, 0)$$

である.

右辺では

$$\begin{aligned} (\boldsymbol{g} \cdot \nabla)\boldsymbol{f} &= y^2 \frac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial x} + x \frac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial y} = y^2(0, -1, 0) + x(1, 0, 0) = (x, -y^2, 0) \\ (\boldsymbol{f} \cdot \nabla)\boldsymbol{g} &= y \frac{\partial \boldsymbol{g}}{\partial x} - x \frac{\partial \boldsymbol{g}}{\partial y} + z \frac{\partial \boldsymbol{g}}{\partial z} = y(0, 1, 0) - x(2y, 0, 0) + z(0, 0, 0) = (-2xy, y, 0) \\ \boldsymbol{f}(\nabla \cdot \boldsymbol{g}) &= (y, -x, z)0 = (0, 0, 0) \\ \boldsymbol{g}(\nabla \cdot \boldsymbol{f}) &= (y^2, x, 0)1 = (y^2, x, 0) \end{aligned}$$

なので，右辺は

$$(x, -y^2, 0) - (-2xy, y, 0) + (0, 0, 0) - (y^2, x, 0) = (x + 2xy - y^2, -x - y - y^2, 0)$$

となり，左辺と一致する.

2. 定数 r に対して，スカラー場 $f(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ と曲線 $C : (r\cos t, r\sin t, r)_{t=0}^{\frac{3\pi}{2}}$ が与えられたとき，次の問に答えよ.

   (a) 線要素

$$\left| \frac{dC}{dt} \right| = \sqrt{\left(\frac{dc_x}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dc_y}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dc_z}{dt} \right)^2}$$

を求めよ.
【回答例】

$$\left|\frac{dC}{dt}\right| = \sqrt{\left(\frac{dr\cos t}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dr\sin t}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dr}{dt}\right)^2} = r$$

(b) 線積分

$$\int_C f dC$$

を求めよ.
【回答例】

$$\begin{aligned}
\int_C f dC &= \int_0^{3\pi/2} f \left|\frac{dC}{dt}\right| dt \\
&= \int_0^{3\pi/2} \sqrt{(r\cos t)^2 + (r\sin t)^2 + r^2} \left|\frac{dC}{dt}\right| dt \\
&= \int_0^{3\pi/2} \sqrt{2} r^2 dt \\
&= \frac{3\pi}{\sqrt{2}} r^2
\end{aligned}$$

3. $\mathbb{S}$ を原点を中心とする半径 1 の球面とし，ベクトル場 $\boldsymbol{f} = (\alpha x, \beta y, \gamma z)$ の $\mathbb{S}$ 上の面積分

$$\iint_{\mathbb{S}} \boldsymbol{f} \cdot d\boldsymbol{S}$$

を求めよ．ただし，α,β,γ は定数とし，平面 $\mathbb{S}$ の方向単位ベクトル $\boldsymbol{n}$ の向きは原点から遠ざかるように選ぶ.

【回答例】

ガウスの発散定理

$$\iint_{\mathbb{S}} \boldsymbol{f} \cdot d\boldsymbol{S} = \iiint_{\mathcal{V}} \nabla \cdot \boldsymbol{f} d\mathcal{V}$$

を用いると，$\nabla \cdot \boldsymbol{f} = \alpha + \beta + \gamma$ のため

$$\iint_{\mathbb{S}} \boldsymbol{f} \cdot d\boldsymbol{S} = \iiint_{\mathcal{V}} \nabla \cdot \boldsymbol{f} d\mathcal{V} = (\alpha + \beta + \gamma) \iiint_{\mathcal{V}} d\mathcal{V}$$

と書けるが，$\iiint_{\mathcal{V}} d\mathcal{V}$ は半径 1 の球の体積であるため

$$\iint_{\mathbb{S}} \boldsymbol{f} \cdot d\boldsymbol{S} = (\alpha + \beta + \gamma) \iiint_{\mathcal{V}} d\mathcal{V} = (\alpha + \beta + \gamma)\frac{4}{3}\pi$$

である.