応用数学 B

ナブラを含む微分演算の公式とその応用

韓　承鎬

電気通信大学

November 19, 2018

三つのベクトルの積演算

資料：pp. 13～17

1. $(\boldsymbol{f} \times \boldsymbol{g}) \cdot \boldsymbol{h} = (\boldsymbol{h} \times \boldsymbol{f}) \cdot \boldsymbol{g} = (\boldsymbol{g} \times \boldsymbol{h}) \cdot \boldsymbol{f}$
2. $\boldsymbol{f} \cdot (\boldsymbol{g} \times \boldsymbol{h}) = \boldsymbol{h} \cdot (\boldsymbol{f} \times \boldsymbol{g}) = \boldsymbol{g} \cdot (\boldsymbol{h} \times \boldsymbol{f})$
3. $(\boldsymbol{f} \times \boldsymbol{g}) \times \boldsymbol{h} = (\boldsymbol{f} \cdot \boldsymbol{h})\boldsymbol{g} - (\boldsymbol{g} \cdot \boldsymbol{h})\boldsymbol{f}$
4. $\boldsymbol{f} \times (\boldsymbol{g} \times \boldsymbol{h}) = (\boldsymbol{f} \cdot \boldsymbol{h})\boldsymbol{g} - (\boldsymbol{f} \cdot \boldsymbol{g})\boldsymbol{h}$

- 1,2 は反時計方向に回転
- 回転は結合則が成り立たない
- 3 は括弧内がベクトルとして残り、後者から前者を引く
- 4 は交換ルールを適応し、3 に変換

ナブラとスカラー関数を含む積演算

$\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right)$ は微分演算子、$\frac{d(fg)}{dx} = \frac{df}{dx}g + f\frac{dg}{dx}$ より

5. $\nabla(fg) = g\nabla f + f\nabla g$
6. $\nabla \cdot (f\boldsymbol{g}) = (\nabla f) \cdot \boldsymbol{g} + f(\nabla \cdot \boldsymbol{g})$
7. $\nabla \times (f\boldsymbol{g}) = (\nabla f) \times \boldsymbol{g} + f(\nabla \times \boldsymbol{g})$

ナブラとベクトル関数を含む積演算

8. $\nabla(\boldsymbol{f}\cdot\boldsymbol{g}) = (\boldsymbol{g}\cdot\nabla)\boldsymbol{f} + (\boldsymbol{f}\cdot\nabla)\boldsymbol{g} + \boldsymbol{f}\times(\nabla\times\boldsymbol{g}) + \boldsymbol{g}\times(\nabla\times\boldsymbol{f})$
9. $\nabla\cdot(\boldsymbol{f}\times\boldsymbol{g}) = (\nabla\times\boldsymbol{f})\cdot\boldsymbol{g} - (\nabla\times\boldsymbol{g})\cdot\boldsymbol{f}$
10. $\nabla\times(\boldsymbol{f}\times\boldsymbol{g}) = (\nabla\cdot\boldsymbol{g})\boldsymbol{f} - (\nabla\cdot\boldsymbol{f})\boldsymbol{g} + (\boldsymbol{g}\cdot\nabla)\boldsymbol{f} - (\boldsymbol{f}\cdot\nabla)\boldsymbol{g}$

二つのナブラを含む積演算

11 $\nabla \cdot (\nabla f) = \nabla^2 f$ (ラプラシアン)
12 $\nabla \times (\nabla f) = \mathbf{0}$
13 $\nabla \cdot (\nabla \times \boldsymbol{f}) = 0$
14 $\nabla \times (\nabla \times \boldsymbol{f}) = \nabla(\nabla \cdot \boldsymbol{f}) - \nabla^2 \boldsymbol{f}$

- 11 は基本
- 12,13 は明らか
- 14 で

$$
\begin{aligned}
\nabla^2 \boldsymbol{f} \quad = \quad & \left(\frac{\partial^2 f_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f_x}{\partial z^2} \right) \boldsymbol{e}_x \\
& + \left(\frac{\partial^2 f_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f_y}{\partial z^2} \right) \boldsymbol{e}_y \\
& + \left(\frac{\partial^2 f_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f_z}{\partial z^2} \right) \boldsymbol{e}_z
\end{aligned}
$$

例

電荷も電流も存在しない真空中における電場 $\boldsymbol{E}$、磁場 $\boldsymbol{B}$ の関係は次のような方程式で与えられる。

$$\nabla \times \boldsymbol{E} + \frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} = 0 \tag{1}$$

$$\nabla \times \boldsymbol{B} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t} = 0 \tag{2}$$

$$\nabla \cdot \boldsymbol{E} = 0 \tag{3}$$

$$\nabla \cdot \boldsymbol{B} = 0 \tag{4}$$

ただし、c は定数である。これらから

$$\begin{aligned} \nabla^2 \boldsymbol{E} &= \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \boldsymbol{E}}{\partial t^2} \\ \nabla^2 \boldsymbol{B} &= \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \boldsymbol{B}}{\partial t^2} \end{aligned}$$

を導け。

練習問題

$\boldsymbol{f} = (x, y, z)$,$\boldsymbol{g} = (x^2, y, 0)$ とし、

$$\nabla(\boldsymbol{f} \cdot \boldsymbol{g}) = (\boldsymbol{f} \cdot \nabla)\boldsymbol{g} + (\boldsymbol{g} \cdot \nabla)\boldsymbol{f} + \boldsymbol{g} \times (\nabla \times \boldsymbol{f}) + \boldsymbol{f} \times (\nabla \times \boldsymbol{g})$$

が成り立つことを確かめよ。