応用数学 B

ガウスの発散定理とストークスの定理

韓　承鎬

電気通信大学

November 11, 2018

線積分、面積分、体積分

- 線積分：空間曲線 $C : (\boldsymbol{c}(u))_{u=a}^{b}$
  - スカラー場：$\int_a^b f(\boldsymbol{c}) \left| \frac{d\boldsymbol{c}}{du} \right| du$
  - ベクトル場：$\int_C \boldsymbol{f} \cdot d\boldsymbol{c}$
- 面積分：空間曲面
  $\mathbb{S} : (\boldsymbol{s}(u,v))_{(u,v)\in\mathbb{D}} = (s_x(u,v), s_y(u,v), s_z(u,v))_{(u,v)\in\mathbb{D}}$
  - スカラー場：$\iint_{\mathbb{S}} f d\mathbb{S} = \iint_{\mathbb{D}} f(\boldsymbol{s}) \left| \frac{\partial \boldsymbol{s}}{\partial u} \times \frac{\partial \boldsymbol{s}}{\partial v} \right| dudv$
  - ベクトル場：$\iint_{\mathbb{S}} \boldsymbol{f} \cdot d\boldsymbol{S}$
- 体積分：座標変換 $(x,y,z) \in \mathcal{V}$ から $(u,v,w) \in \mathcal{U}$
  - ヤコビアン：$|J| = \left| \frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)} \right|$
  - スカラー場：$\iiint_{\mathcal{V}} f d\mathcal{V} = \iiint_{\mathcal{V}} f dxdydz =$
    $\iiint_{\mathcal{U}} f(x(u,v,w), y(u,v,w), z(u,v,w))|J| dudvdw$
  - ベクトル場：$\iiint_{\mathcal{V}} \boldsymbol{f} d\mathcal{V} = \iiint_{\mathcal{V}} (f_x \boldsymbol{e}_x + f_y \boldsymbol{e}_y + f_z \boldsymbol{e}_z) d\mathcal{V}$

ガウスの発散定理

Theorem

空間曲面閉曲面 $\mathbb{S}$ によって囲まれた領域 $\mathcal{V}$ がベクトル場 $\boldsymbol{f}$ であるとき

$$\iiint_{\mathcal{V}} \nabla \cdot \boldsymbol{f} \, d\mathcal{V} = \iint_{\mathbb{S}} \boldsymbol{f} \cdot \boldsymbol{n} d\mathbb{S} = \iint_{\mathbb{S}} \boldsymbol{f} \cdot d\boldsymbol{S}$$

ただし，法線ベクトル $\boldsymbol{n}$ は外向きにとるものとする．

連続した空間でのベクトル場の発散の総量は、それを包む局面の面積分となる。

証明

基本的な原理

連続した空間の内部では、一つの面で出ていくと、隣の面に入るので、総和はゼロとなる。

例：東京都の人口移動

ストークスの定理

Theorem

空間曲面ベクトル場 $\boldsymbol{f}$ 内に曲面 $\mathbb{S}$ があり，その境界が閉曲線 C であるとする．曲面の単位法線ベクトル $\boldsymbol{n}$ を $\mathbb{S}$ の正の側にとり，C を正の方向にまわるとき

$$\iint_{\mathbb{S}} \nabla \times \boldsymbol{f} \cdot d\boldsymbol{S} = \oint_C \boldsymbol{f} \cdot d\boldsymbol{c}$$

ただし，法線ベクトル $\boldsymbol{n}$ は外向きにとるものとする．

連続した平面でのベクトル場の回転の総量は、それを囲む曲線の接線線積分となる。

証明

基本的な原理

連続した平面の内部では、一つの線が正の方向で回ると、隣の線は負となるので、総和はゼロとなる。

例 (ガウスの発散定理)

半球面 $\mathbb{S} : x^2 + y^2 + z^2 = 1, z \geq 0$ 上において，ベクトル場 $\boldsymbol{f} = (xz, yz, 0)$ の面積分 $\displaystyle\iint_{\mathbb{S}} \boldsymbol{f} \cdot d\boldsymbol{S}$ を計算せよ.

例 (ストークスの定理)

球面 $x^2 + y^2 + (z-3)^2 = 3^2$ と平面 $z = x + 3$ の交わりを C とし，原点からみて時計回りを正の向きとする．このとき，ベクトル場 $\boldsymbol{f} = (2y, z, 3y)$ について線積分 $\displaystyle\oint_C \boldsymbol{f} \cdot d\boldsymbol{c}$ を計算せよ.

練習問題

ガウスの発散定理

半径 r, 高さ h の円筒内の領域を $\mathcal{V}$ とし，ベクトル場

$$\boldsymbol{f}(x,y,z) = \left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}, 0 \right)$$

について体積分 $\displaystyle\iiint_{\mathcal{V}} \nabla \cdot \boldsymbol{f}\, d\mathcal{V}$ を求めよ.

ストークスの定理

$x^2+y^2=1$, $z=0$ で表される曲線を C とする．3 次元のベクトル場 $\boldsymbol{f}(x,y,z) = (2x+3y, 3x-5y, 0)$ について，ストークス定理を利用し，$\displaystyle\oint_C \boldsymbol{f} \cdot d\boldsymbol{c}$ を求めよ.