応用数学 B

面積分と体積分

韓　承鎬

電気通信大学

November 5, 2018

空間曲面

空間曲面

空間上の点 s の位置ベクトル $\boldsymbol{s}$ が変数 (u, v) の関数

$$\boldsymbol{s} = (s_x(u, v), s_y(u, v), s_z(u, v)) \tag{1}$$

であるとき，変数 (u, v) の変化区間 $\mathbb{D}$ での s の軌跡

$$\mathbb{S} : (\boldsymbol{s}(u, v))_{(u,v)\in\mathbb{D}} = (s_x(u, v), s_y(u, v), s_z(u, v))_{(u,v)\in\mathbb{D}}$$

空間曲面となり，式 (1) を**空間曲面の方程式**という．

- $\partial\boldsymbol{s}/\partial u$ は u 曲線に接する
- $\partial\boldsymbol{s}/\partial v$ は v 曲線に接する

接平面，法単位ベクトル

接平面，法単位ベクトル

曲面 $\mathbb{S}$: $\boldsymbol{s}(u, v)$ に対して，$\partial \boldsymbol{s}/\partial u$, $\partial \boldsymbol{s}/\partial v$ を含む平面を**接平面**とし，接平面に垂直な単位ベクトル

$$\boldsymbol{n} = \frac{\frac{\partial \boldsymbol{s}}{\partial u} \times \frac{\partial \boldsymbol{s}}{\partial v}}{\left| \frac{\partial \boldsymbol{s}}{\partial u} \times \frac{\partial \boldsymbol{s}}{\partial v} \right|}$$

を**法単位ベクトル**と定義する．

面素，面素ベクトル

$$\Delta \boldsymbol{s}_u = \boldsymbol{s}(u+\Delta u, v) - \boldsymbol{s}(u,v) \approx \frac{\partial \boldsymbol{s}}{\partial u}\Delta u$$

と

$$\Delta \boldsymbol{s}_v = \boldsymbol{s}(u, v+\Delta v) - \boldsymbol{s}(u,v) \approx \frac{\partial \boldsymbol{s}}{\partial v}\Delta v$$

に囲まれた四辺形の面積の極限

$$d\mathbb{S} = |\Delta \boldsymbol{s}_u \times \Delta \boldsymbol{s}_v| \approx \left|\frac{\partial \boldsymbol{s}}{\partial u} \times \frac{\partial \boldsymbol{s}}{\partial v}\right| dudv$$

を**面素**といい

$$d\boldsymbol{S} = \frac{\partial \boldsymbol{s}}{\partial u} \times \frac{\partial \boldsymbol{s}}{\partial v} dudv = \boldsymbol{n} d\mathbb{S}$$

を**面素ベクトル**という.

面積分

面積分

二次元変数 (u, v) の変化区間 $(u, v) \in \mathbb{D}$ に対して，曲面 $\mathbb{S} : (\boldsymbol{s}(u, v))_{(u,v)\in\mathbb{D}}$ が与えられたとき，空間のスカラー場 $f(x, y, z)$ では

$$\iint_{\mathbb{S}} f d\mathbb{S} = \iint_{\mathbb{D}} f(s_x(u, v), s_y(u, v), s_z(u, v)) \left| \frac{\partial \boldsymbol{s}}{\partial u} \times \frac{\partial \boldsymbol{s}}{\partial v} \right| dudv$$

を $\mathbb{S}$ における**面積分**といい，ベクトル場 $\boldsymbol{f} = (f_x(x, y, z), f_y(x, y, z), f_z(x, y, z))$ においては

$$\iint_{\mathbb{S}} \boldsymbol{f} \cdot d\boldsymbol{S} = \iint_{\mathbb{S}} \boldsymbol{f} \cdot \boldsymbol{n} d\mathbb{S}$$

を**ベクトル場の面積分**という．

例

スカラー場 $f = x + y + z$ において，半径 a の半球面

$$\mathbb{S} : (a \sin u \cos v, a \sin u \sin v, a \cos u)_{(u,v)\in\mathbb{D}}\,, \quad \mathbb{D} : (u, v)_{u=0,v=0}^{\frac{\pi}{2},2\pi}$$

における面積分を計算せよ．

$$\begin{aligned} \frac{\partial \boldsymbol{s}}{\partial u} &= (a \cos u \cos v, a \cos u \sin v, -a \sin u) \\ \frac{\partial \boldsymbol{s}}{\partial v} &= (-a \sin u \sin v, a \sin u \cos v, 0) \end{aligned}$$

故に

$$
\begin{aligned}
\left|\frac{\partial \boldsymbol{s}}{\partial u} \times \frac{\partial \boldsymbol{s}}{\partial v}\right| &= \left|\begin{matrix} \boldsymbol{e}_x & \boldsymbol{e}_y & \boldsymbol{e}_z \\ a \cos u \cos v & a \cos u \sin v & -a \sin u \\ -a \sin u \sin v & a \sin u \cos v & 0 \end{matrix}\right| \\
&= \left|\left(a^2 \sin^2 u \cos v, a^2 \sin^2 u \sin v, a^2 \cos u \sin u\right)\right| \\
&= \sqrt{a^4 \sin^4 u + a^4 \cos^2 u \sin^2 u} = a^2 \sin u
\end{aligned}
$$

従って,

$$
\begin{aligned}
& \iint_{\mathbb{S}} f d\mathbb{S} \\
= \; & \iint_{\mathbb{D}} (a \sin u \cos v + a \sin u \sin v + a \cos u)(a^2 \sin u) du dv \\
= \; & a^3 \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 u du \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos v dv + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 u du \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin v dv \right. \\
& \left. + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin u \cos u du \int_0^{\frac{\pi}{2}} dv \right) \\
= \; & 2a^3 \pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin u \cos u du = \pi a^3
\end{aligned}
$$

例

平面 $\mathbb{S}: z = 1 - x - y,\ x \geq 0,\ y \geq 0,\ z \geq 0$ におけるベクトル場 $\boldsymbol{f} = (2x, -y, z)$ の面積分 $\iint_{\mathbb{S}} \boldsymbol{f} \cdot d\boldsymbol{S}$ を計算せよ．ただし，平面 $\mathbb{S}$ における方単位ベクトル $\boldsymbol{n}$ の向きは，原点から遠ざかるように選ぶ．

$\mathbb{S}: z = 1 - x - y$ および $z \geq 0$ より，変数 x を $x \geq 0$ で変化させると，y は $0 \leq y \leq 1 - x$ の範囲内で変化する．故に，平面上の点の座標は x,y を用いて

$$\mathbb{S}: (x, y, 1 - x - y)_{x=0, y=0}^{1, 1-x}$$

で表せる．

故に

$$\frac{\partial \boldsymbol{s}}{\partial x} \times \frac{\partial \boldsymbol{s}}{\partial y} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{e}_x & \boldsymbol{e}_y & \boldsymbol{e}_z \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = (1, 1, 1)$$

従って,

$$
\begin{aligned}
& \iint_{\mathbb{S}} \boldsymbol{f} \cdot d\boldsymbol{S} \\
= & \int_0^1 \int_0^{1-x} (2x, -y, 1-x-y) \cdot (1,1,1) dydx \\
= & \int_0^1 \int_0^{1-x} (x - 2y + 1) dydx \\
= & \int_0^1 \left[(x+1)y - y^2 \right]_0^{1-x} dx \\
= & \int_0^1 2x - 2x^2 dx = \frac{1}{3}
\end{aligned}
$$

体積分

体積分

空間上で体積 $\mathcal{V}$ が与えられたとき，スカラー場 $f(x,y,z)$ において

$$\iiint_{\mathcal{V}} f(x,y,z)d\mathcal{V} = \iiint_{\mathcal{V}} f(x,y,z)dxdydz$$

を $\mathcal{V}$ における**体積分**という．ベクトル場の体積分は $\boldsymbol{f}$ の各成分を体積分したもの

$$\iiint_{\mathcal{V}} \boldsymbol{f}(x,y,z)d\mathcal{V} = \iiint_{\mathcal{V}} \left(f_x\boldsymbol{e}_x + f_y\boldsymbol{e}_y + f_z\boldsymbol{e}_z\right)d\mathcal{V}$$

である．

例

領域 $\mathcal{V}$: $x+y+z \leq 1$, $x \geq 0$,$y \geq 0$,$z \geq 0$ の体積を求めよ．

$x+y+z \leq 1$ を満たす変数の変化範囲を考える． x を 0 から 1 まで変化させると，与えられた x に対して， y の変化範囲は 0 から $1-x$ となる． さらに y を固定すると z の変化範囲は 0 から $1-x-y$ となるので体積は

$$
\begin{aligned}
& \iiint_{\mathcal{V}} d\mathcal{V} \\
= & \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \int_0^{1-x-y} dz \\
= & \int_0^1 dx \int_0^{1-x} 1-x-y dy \\
= & \frac{1}{2}\int_0^1 (1-x)^2 dx = \frac{1}{6}
\end{aligned}
$$

ヤコビ行列

ヤコビ行列

独立した 3 つの変数 u, v, w とその関数
$x(u,v,w)$,$y(u,v,w)$,$z(u,v,w)$ が与えられたとき

$$\begin{pmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial w} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial w} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial w} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} du \\ dv \\ dw \end{pmatrix}$$

となるが

$$J = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial w} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial w} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial w} \end{pmatrix}$$

を**ヤコビ行列**という

ヤコビアン

ヤコビアン

ヤコビ行列の無限小変換の体積比

$$|J| = \frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial w} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial w} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial w} \end{vmatrix}$$

を x, y, z の u, v, w に関する**ヤコビアン**と呼ぶ.

性質

$(u, v, w) \in \mathcal{U}$ のとき，$(x, y, z) \in \mathcal{V}$ とすると

1. 領域 $\mathcal{U}$ と $\mathcal{V}$ の点が一対一に対応
2. x, y, z が偏微分可能で導関数が連続
3. $\mathcal{U}$ でヤコビアン $|J|$ が零でないとき

$$
\begin{aligned}
& \iiint_{\mathcal{V}} f(x, y, z) dxdydz \\
= \; & \iiint_{\mathcal{U}} f(x(u, v, w), y(u, v, w), z(u, v, w)) |J| dudvdw
\end{aligned}
$$

となる．

極座標系

点 a の座標を直交座標系で (x, y), 極座標系で (r, θ) とすると，両座標の関係は

$$\begin{cases} x &= r\cos\theta \\ y &= r\sin\theta \end{cases}$$

となるので

$$|J| = \begin{vmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{vmatrix} = r$$

となる.

例

$$
\begin{aligned}
& \iint_{x^2+y^2\leq 1} e^{-(x^2+y^2)}dxdy \\
= \; & \int_0^1 \int_0^{2\pi} e^{-r^2} rdrd\theta \\
= \; & \int_0^1 e^{-r^2} rdr \int_0^{2\pi} d\theta \\
= \; & 2\pi \left[-\frac{e^{-r^2}}{2} \right]_0^1 \\
= \; & \pi(1-e^{-1})
\end{aligned}
$$

球座標系

$$\begin{cases} x &= r\sin\theta\cos\phi \\ y &= r\sin\theta\sin\phi \\ z &= r\cos\theta \end{cases} \tag{2}$$

より

$$|J| = \begin{vmatrix} \sin\theta\cos\phi & r\cos\theta\cos\phi & -r\sin\theta\sin\phi \\ \sin\theta\sin\phi & r\cos\theta\sin\phi & r\sin\theta\cos\phi \\ \cos\theta & -r\sin\theta & 0 \end{vmatrix} = r^2\sin\theta \tag{3}$$

例

原点を中心とする半径 1 の球の内部領域を $\mathcal{V}$ とした場合

$$\iiint_{\mathcal{V}} (x^2 + y^2 + z^2) d\mathcal{V}$$

を計算すると式 (2) 及び (3) より

$$\begin{aligned} & \iiint_{\mathcal{V}} (x^2 + y^2 + z^2) d\mathcal{V} = \iiint_{\mathcal{V}} r^2 d\mathcal{V} \\ = & \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \int_0^1 r^2 \cdot r^2 \sin\theta dr d\theta d\phi = \frac{4}{5}\pi \end{aligned}$$

練習問題

曲面

$$\mathbb{S} : (u\cos v, u\sin v, u)_{u=0, v=0}^{1, 2\pi}$$

が与えられたとき，次の問に答えよ．

1. $\mathbb{S}$ の概形を描け
2. $\mathbb{S}$ の面積を求めよ．
3. $\mathbb{S}$ 上で $\boldsymbol{f}(u, v) = (u, v, 0)$ とするとき，法単位ベクトルの z 成分は正であるとし，面積分 $\iint_{\mathbb{S}} \boldsymbol{f} \cdot d\boldsymbol{S}$ を求めよ．