応用数学 B
線積分と面積分

韓　承鎬

電気通信大学

October 22, 2018

アナウンス

休講

来週 10/29 は休講

予習内容

面積分と体積分 (資料 pp. 18~25)

回転

回転

ベクトル場 $\boldsymbol{f}(x,y,z) = (f_x(x,y,z), f_y(x,y,z), f_z(x,y,z))$ に対して

$$\nabla \times \boldsymbol{f} := \begin{vmatrix} \boldsymbol{e}_x & \boldsymbol{e}_y & \boldsymbol{e}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ f_x & f_y & f_z \end{vmatrix}$$

これをベクトル場 $\boldsymbol{f}(x,y,z)$ の**回転**という.

- 別名：ローティション、カール
- 別表記：rot $\boldsymbol{f}$、curl $\boldsymbol{f}$

性質

1. $\nabla \times (\alpha \boldsymbol{f} + \beta \boldsymbol{g}) = \alpha \nabla \times \boldsymbol{f} + \beta \nabla \times \boldsymbol{g}$
2. スカラー場 $f(x, y, z)$ とベクトル場 $\boldsymbol{g}(x, y, z)$ に対し

$$\nabla \times (f\boldsymbol{g}) = \nabla f \times \boldsymbol{g} + f(\nabla \times \boldsymbol{g})$$

回転の意味

ベクトル場での渦巻きの流速ベクトルを表す

空間曲線

空間曲線

空間上の点 c の位置ベクトルが変数 u の関数として

$$\boldsymbol{c}(u) = (c_x(u), c_y(u), c_z(u)) \tag{1}$$

であるとき，変数 u の変化区間 $a \leq u \leq b$ での c の軌跡は

$$C : (\boldsymbol{c}(u))_{u=a}^{b} = (c_x(u), c_y(u), c_z(u))_{u=a}^{b}$$

空間曲線となり，式 (1) を**空間曲線の方程式**という．

接ベクトルと弧長

接ベクトル

$$\lim_{\Delta u \to 0} \frac{\Delta C}{\Delta u} = \frac{d\boldsymbol{c}(u)}{du} = \left(\frac{dc_x(u)}{du}, \frac{dc_y(u)}{du}, \frac{dc_z(u)}{du} \right)$$

弧長

$a \leq u \leq b$で変化するときの弧長は

$$\int_C dC = \int_C |d\boldsymbol{c}| = \int_a^b \left| \frac{d\boldsymbol{c}}{du} \right| du$$

で与えられる.

スカラー場の線積分

スカラー場の線積分

空間のスカラー場 $f(x,y,z)$ において，空間曲線 $C:(\mathbf{c}(u))_{u=a}^{b}$ が与えられたとき

$$
\begin{aligned}
&\int_C f(c_x,c_y,c_z)dC \\
= \;& \int_C f(\mathbf{c})|d\mathbf{c}| = \int_a^b f(\mathbf{c}) \underbrace{\left|\frac{d\mathbf{c}}{du}\right| du}_{arc\ \ length} \\
= \;& \int_a^b f(c_x,c_y,c_z)\sqrt{\left(\frac{dc_x}{du}\right)^2+\left(\frac{dc_y}{du}\right)^2+\left(\frac{dc_z}{du}\right)^2}du
\end{aligned}
$$

を曲線 C に沿っての f の線積分とよぶ.

ベクトル場の接線線積分

接線線積分

ベクトル場 $\boldsymbol{f}(x, y, z) = (f_x(x, y, z), f_y(x, y, z), f_z(x, y, z))$ において，空間曲線 $C : (\boldsymbol{c}(u))_{u=a}^{b}$ が与えられたとき，ベクトル $\boldsymbol{f}(x, y, z)$ と $d\boldsymbol{c}$ との内積の C に沿っての線積分

$$\int_C \boldsymbol{f} \cdot d\boldsymbol{c}$$

をベクトル場 $\boldsymbol{f}$ の曲線 C に沿っての**接線線積分**と呼ぶ．曲線 C 単位接線ベクトル $\boldsymbol{t} = \frac{d\boldsymbol{c}}{du}$ を用いると，接線線積分は

$$\int_C \boldsymbol{f} \cdot d\boldsymbol{c} = \int_C \boldsymbol{f} \cdot \boldsymbol{t} dC = \int_a^b \boldsymbol{f} \cdot \boldsymbol{t} du$$

で表せる．

比較

- スカラー場 $f(x, y, z)$ の線積分

$$\int_C f(c_x, c_y, c_z) dC = \int_a^b f(\boldsymbol{c}) \underbrace{\left| \frac{d\boldsymbol{c}}{du} \right|}_{arc\ \ length} du$$

$$= \int_a^b f(c_x, c_y, c_z) \sqrt{\left(\frac{dc_x}{du}\right)^2 + \left(\frac{dc_y}{du}\right)^2 + \left(\frac{dc_z}{du}\right)^2} du$$

- ベクトル場 $\boldsymbol{f}(x, y, z)$ の接線線積分

$$\int_C \boldsymbol{f} \cdot d\boldsymbol{c} = \int_a^b \boldsymbol{f} \cdot \left(\frac{dc_x}{du}, \frac{dc_y}{du}, \frac{dc_z}{du} \right) du$$

$$= \int_a^b \left(f_x \frac{dc_x}{du} + f_y \frac{dc_y}{du} + f_z \frac{dc_z}{du} \right) du$$

計算例

$C : (a\cos\theta, a\sin\theta, b\theta)_{\theta=0}^{\pi}$ のとき，ベクトル場 $\boldsymbol{f}(x,y,z) = (y, -z, x)$ の接線線積分を求めよ．

【回答】

$$\begin{cases} \dfrac{d(a\cos\theta)}{d\theta} & = & -a\sin\theta \\ \dfrac{d(a\sin\theta)}{d\theta} & = & a\cos\theta \\ \dfrac{d(b\theta)}{d\theta} & = & b \end{cases}$$

より

$$\begin{aligned} \int_C \boldsymbol{f}\cdot d\boldsymbol{c} &= \int_0^{\pi} \left[a\sin\theta\cdot(-a\sin\theta) - b\theta\cdot a\cos\theta + a\cos\theta\cdot b\right] d\theta \\ &= \int_0^{\pi} \left(-a^2\sin^2\theta - ab\theta\cos\theta + ab\cos\theta\right) d\theta \\ &= -\frac{\pi a^2}{2} + 2ab \end{aligned}$$

性質

積分路非依存性

スカラー値関数 $f(x, y, z)$ の勾配ベクトル ∇f の接線線積分は，曲線 C の始点を a，終点を b とすると

$$\begin{aligned}\int_C \nabla f \cdot d\boldsymbol{c} &= \int_C \left(\frac{\partial f}{\partial c_x}, \frac{\partial f}{\partial c_y}, \frac{\partial f}{\partial c_z}\right) \cdot d\boldsymbol{c} \\ &= \int_C \left(\frac{\partial f}{\partial c_x} dc_x + \frac{\partial f}{\partial c_y} dc_y + \frac{\partial f}{\partial c_z} dc_z\right) \\ &= \int_C df = [f]_a^b = f(b) - f(a)\end{aligned}$$

となって，2 点 a, b にだけ関係し，積分路に依存しない．

とくに，曲線 C が閉曲線 (始点と終点が一致する曲線) のとき，線積分を $\oint_C$ と表すことにすれば $\oint_C \nabla f \cdot d\boldsymbol{c} = 0$ である．

例 (定義による計算)

上の例でのスカラー場 $f(x,y,z) = x^2yz$ と曲線 $C : \left(u, \frac{u^2}{2}, \frac{u^3}{6}\right)_{u=0}^{1}$ に対して，線積分を計算すると

$$
\begin{aligned}
\nabla f &= \left(2c_x c_y c_z, c_x^2 c_z, c_x^2 c_y\right) = \left(\frac{u^6}{6}, \frac{u^5}{6}, \frac{u^4}{2}\right) \\
d\boldsymbol{c} &= \left(1, u, \frac{u^2}{2}\right)
\end{aligned}
$$

より

$$
\int_C \nabla f \cdot d\boldsymbol{c} = \int_0^1 \left(\frac{u^6}{6} + \frac{u^6}{6} + \frac{u^6}{4}\right) du = \int_0^1 \frac{7u^6}{12} = \frac{1}{12}
$$

が得られる．

例 (性質を利用した計算)

一方，$\int_C \nabla f \cdot d\boldsymbol{c}$ が経路に依存しない性質を利用すると，$u = 0, 1$ に対応する曲線上の点の位置ベクトル $\boldsymbol{c}(0) = (0, 0, 0)$ 及び $\boldsymbol{c}(1) = \left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{6}\right)$ より

$$\int_C \nabla f \cdot d\boldsymbol{c} = f\left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{6}\right) - f\,(0, 0, 0) = \frac{1}{12}$$

と計算が簡単になる．

練習問題

ベクトル場 $\boldsymbol{f}(x, y, z) = (yz, zx, xy)$ において，原点 $o(0, 0, 0)$ から点 $a(1, 2, 2)$ までの直線に沿った接線線積分

$$\int_C \boldsymbol{f} \cdot d\boldsymbol{c}$$

を **1) 定義に基づいた方法**と **2) 積分経路非依存性を利用した方法**で計算せよ．