応用数学 B

スカラー場とベクトル場

韓　承鎬

電気通信大学

October 15, 2018

回転

回転

ベクトル場 $\boldsymbol{f}(x,y,z) = (f_x(x,y,z), f_y(x,y,z), f_z(x,y,z))$ に対して

$$\nabla \times \boldsymbol{f} := \left(\frac{\partial f_z}{\partial y} - \frac{\partial f_y}{\partial z}, \frac{\partial f_x}{\partial z} - \frac{\partial f_z}{\partial x}, \frac{\partial f_y}{\partial x} - \frac{\partial f_x}{\partial y}\right) = \begin{vmatrix} \boldsymbol{e}_x & \boldsymbol{e}_y & \boldsymbol{e}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ f_x & f_y & f_z \end{vmatrix}$$

これをベクトル場 $\boldsymbol{f}(x,y,z)$ の**回転**という.

- 別名：ローティション、カール
- 別表記：rot $\boldsymbol{f}$、curl $\boldsymbol{f}$

計算例

ベクトル場 $\boldsymbol{f} = \frac{xyz}{6}(x, y, z)$ の回転は

$$
\begin{aligned}
& \nabla \times \boldsymbol{f} \\
= & \begin{vmatrix} \boldsymbol{e}_x & \boldsymbol{e}_y & \boldsymbol{e}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{x^2yz}{6} & \frac{xy^2z}{6} & \frac{xyz^2}{6} \end{vmatrix} \\
= & \left(\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{xyz^2}{6}\right) - \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{xy^2z}{6}\right), \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{x^2yz}{6}\right) - \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{xyz^2}{6}\right), \right. \\
& \left. \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{xy^2z}{6}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{x^2yz}{6}\right) \right) \\
= & \left(\frac{x(z^2 - y^2)}{6}, \frac{y(x^2 - z^2)}{6}, \frac{z(y^2 - x^2)}{6} \right)
\end{aligned}
$$

性質

1. $\nabla \times (\alpha \boldsymbol{f} + \beta \boldsymbol{g}) = \alpha \nabla \times \boldsymbol{f} + \beta \nabla \times \boldsymbol{g}$
2. スカラー場 $f(x, y, z)$ とベクトル場 $\boldsymbol{g}(x, y, z)$ に対し

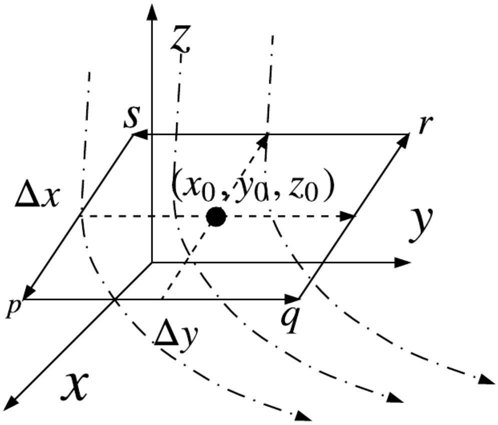
$$\nabla \times (f\boldsymbol{g}) = \nabla f \times \boldsymbol{g} + f(\nabla \times \boldsymbol{g})$$

練習問題

スカラー場 $f(x, y, z) = 2xy^2 - x^3z^2$ に対して，$\nabla \times (\nabla f)$ を求めよ．

回転の意味

ベクトル場での渦巻きの流速ベクトルを表す



ベクトル場 $\boldsymbol{f}$

- 有向平面：法線ベクトルが z 軸の正の方向と一致
- 長方形 C の中心座標：(x_0, y_0, z_0)
- x 軸の長さ：Δx
- y 軸の長さ：Δy
- C での渦の大きさ

$$
\begin{aligned}
& f_y(x_0+\Delta x/2, y_0, z_0)\Delta y - f_x(x_0, y_0+\Delta y/2, z_0)\Delta x \\
& -f_y(x_0-\Delta x/2, y_0, z_0)\Delta y + f_x(x_0, y_0-\Delta y/2, z_0)\Delta x \\
= \;& \left(f_y(x_0+\Delta x/2, y_0, z_0) - f_y(x_0-\Delta x/2, y_0, z_0)\right)\Delta y \\
& -\left(f_x(x_0, y_0+\Delta y/2, z_0) - f_x(x_0, y_0-\Delta y/2, z_0)\right)\Delta x \\
= \;& \left(\frac{f_y(x_0+\Delta x/2, y_0, z_0) - f_y(x_0-\Delta x/2, y_0, z_0)}{\Delta x}\right)\Delta x\Delta y \\
& -\left(\frac{f_x(x_0, y_0+\Delta y/2, z_0) - f_x(x_0, y_0-\Delta y/2, z_0)}{\Delta y}\right)\Delta x\Delta y \\
\approx \;& \left(\frac{\partial f_y}{\partial x} - \frac{\partial f_x}{\partial y}\right)\Delta x\Delta y \\
= \;& \left(\nabla \times \boldsymbol{f}\right)_z \Delta x\Delta y
\end{aligned}
$$

空間曲線

空間曲線

空間上の点 c の位置ベクトルが変数 u の関数として

$$\boldsymbol{c}(u) = (c_x(u), c_y(u), c_z(u)) \tag{1}$$

であるとき，変数 u の変化区間 $a \leq u \leq b$ での c の軌跡は

$$C : (\boldsymbol{c}(u))_{u=a}^{b} = (c_x(u), c_y(u), c_z(u))_{u=a}^{b}$$

空間曲線となり，式 (1) を**空間曲線の方程式**という．

接ベクトル

空間曲線 C の**接ベクトル**は

$$\begin{aligned}
&\lim_{\Delta u \to 0} \frac{\Delta C}{\Delta u} = \lim_{\Delta u \to 0} \frac{\boldsymbol{c}(u+\Delta u)-\boldsymbol{c}(u)}{\Delta u} \\
=\quad &\frac{d\boldsymbol{c}(u)}{du} = \left(\frac{dc_x(u)}{du}, \frac{dc_y(u)}{du}, \frac{dc_z(u)}{du}\right)
\end{aligned}$$

で与えられる.

弧長

空間曲線 C の微小な接ベクトル $d\boldsymbol{c}$ の長さ dC は

$$dC = |d\boldsymbol{c}| = \left| \frac{d\boldsymbol{c}}{du} du \right| = \left| \frac{d\boldsymbol{c}}{du} \right| du$$

となるので，$a \leq u \leq b$ で変化するときの弧長は

$$\int_C dC = \int_C |d\boldsymbol{c}| = \int_a^b \left| \frac{d\boldsymbol{c}}{du} \right| du$$

で与えられる．

スカラー場の線積分

スカラー場の線積分

空間のスカラー場 $f(x, y, z)$ において，空間曲線 $C : (\mathbf{c}(u))_{u=a}^{b}$ が与えられたとき

$$
\begin{aligned}
& \int_C f(c_x, c_y, c_z) dC \\
= \quad & \int_C f(\mathbf{c}) |d\mathbf{c}| = \int_a^b f(\mathbf{c}) \left| \frac{d\mathbf{c}}{du} \right| du \\
= \quad & \int_a^b f(c_x, c_y, c_z) \sqrt{\left(\frac{dc_x}{du}\right)^2 + \left(\frac{c_y}{du}\right)^2 + \left(\frac{c_z}{du}\right)^2} du
\end{aligned}
$$

を曲線 C に沿っての f の線積分とよぶ．

例

$f(x,y,z) = x^2yz,\ C : \left(u, \frac{u^2}{2}, \frac{u^3}{6}\right)_{u=0}^{1}$ とすると

$$\sqrt{\left(\frac{dc_x}{du}\right)^2 + \left(\frac{dc_y}{du}\right)^2 + \left(\frac{dc_z}{du}\right)^2} = \sqrt{1^2 + u^2 + \left(\frac{u^2}{2}\right)^2} = \frac{u^2+2}{2}$$

より

$$\int_C fdC = \int_0^1 \frac{u^7}{12} \cdot \frac{u^2+2}{2} du = \frac{7}{480}$$

である.

練習問題

スカラー場 $f(x, y, z) = x + y + z$ において，円柱ラ線

$$C : (\alpha \cos u, \alpha \sin u, \beta u)_{u=0}^{\pi}$$

に沿った $f(x, y, z)$ の線積分を求めよ．