応用数学 B

スカラー場とベクトル場

韓　承鎬

電気通信大学

問題点

1. 内積：ベクトル · ベクトル=スカラー
2. 外積：ベクトル · ベクトル=ベクトル
3. 面積ベクトル
    1. 単位：面積を長さで表す
    2. 表現法：$\mathbf{r} = (1, 8, 6) = \sqrt{101}\left(\frac{1}{\sqrt{101}}, \frac{8}{\sqrt{101}}, \frac{6}{\sqrt{101}}\right) = |\mathbf{r}|\mathbf{n}$
    3. スカラー倍：
    $\alpha\mathbf{r} = \alpha|\mathbf{r}|\mathbf{n} = \sqrt{\alpha^2 r_x^2 + \alpha^2 r_y^2 + \alpha^2 r_z^2}\mathbf{n} = (\alpha r_x, \alpha r_y, \alpha r_z)$

スカラー場とベクトル場

スカラー場，ベクトル場

平面または空間の領域 $\mathcal{V}$ において，$\mathcal{V}$ 内の各点 p にスカラー $f(p)$ が対応付けられているとき，$\mathcal{V}$ を**スカラー場**といい，ベクトル $\mathbf{f}(p)$ が対応付けられているとき，$\mathcal{V}$ を**ベクトル場**という．

例：

- スカラー場の例：気温，気圧，温度，人口密度
- ベクトル場の例：海流，電場，磁場

勾配

勾配ベクトル

スカラー場 $f(x, y, z)$ に対して，偏導関数を成分にもつベクトル

$$\nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z} \right)$$

をスカラー場 $f(x, y, z)$ の**勾配ベクトル**という．

- **ナブラ, ハミルトンの演算子**
  $\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right)$
- 別名
  勾配ベクトル=**グラディエント**
- 別表記
  $\nabla f = \mathrm{grad}\ f$

勾配の計算例

スカラー場

$$f = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$

の勾配ベクトルの計算

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x} &= -\frac{1}{2}(x^2 + y^2 + z^2)^{-\frac{3}{2}} 2x = -(x^2 + y^2 + z^2)^{-\frac{3}{2}} x \\
\frac{\partial f}{\partial y} &= -(x^2 + y^2 + z^2)^{-\frac{3}{2}} y \\
\frac{\partial f}{\partial z} &= -(x^2 + y^2 + z^2)^{-\frac{3}{2}} z
\end{aligned}$$

より

$$\nabla f = -(x^2 + y^2 + z^2)^{-\frac{3}{2}} (x, y, z)$$

$\mathbf{r} = (x, y, z)$, $|\mathbf{r}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = r$ とおくと, $\nabla f = -\frac{\mathbf{r}}{r^3}$

勾配の性質

スカラー場 $f(x,y,z)$ および $g(x,y,z)$ に対して

1. $\nabla(\alpha f+\beta g)=\alpha\nabla f+\beta\nabla g$　$\alpha,\ \beta$ は定数
2. $\nabla(fg)=(\nabla f)g+f(\nabla g)$
3. $\nabla\left(\frac{f}{g}\right)=\frac{(\nabla f)g-f(\nabla g)}{g^2}$
4. $\nabla(h(f))=\frac{d[h(f)]}{df}\nabla f$　(h は f のスカラー値関数)

練習問題

ベクトル場 $\mathbf{r}(x,y,z)=(x,y,z)$ に対して,

$$r=|\mathbf{r}|=\sqrt{x^2+y^2+z^2}\neq 0$$

とおき，$\nabla f(r)$ を r，$\mathbf{r}$，$\frac{d[f(r)]}{dr}$ を用いて表わせよ.

方向微分係数

方向微分係数

スカラー場 $f(x, y, z)$ において，点 (x_0, y_0, z_0) を通る単位ベクトル $\mathbf{u} = (u_x, u_y, u_z)$ を定め，その方向での傾斜

$$c(x_0, y_0, z_0) = \lim_{\Delta \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta u_x, y_0 + \Delta u_y, z_0 + \Delta u_z) - f(x_0, y_0, z_0)}{\Delta}$$

をスカラー場 $f(x, y, z)$ の点 (x_0, y_0, z_0) における $\mathbf{u}$ 方向への**方向微分係数**という．

勾配の意味

スカラー場 $f(x,y,z)$

1. 同位面 $f(x,y,z)=\alpha$ 上のベクトル $\mathbf{u}$ の方向微分係数

$$\frac{df}{du}=\frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{du}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{du}+\frac{\partial f}{\partial z}\frac{dz}{du}=0 \quad \Leftrightarrow \quad \nabla f\cdot\left(\frac{dx}{du},\frac{dy}{du},\frac{dz}{du}\right)=0$$

2. $\left(\frac{dx}{du},\frac{dy}{du},\frac{dz}{du}\right)$ は微分点における接線の方向ベクトル

$$\nabla f\cdot\mathbf{u}=0\Leftrightarrow\nabla f\perp\mathbf{u}$$

3. ∇f は接線に垂直な法線ベクトル，単位法線ベクトル

$$\mathbf{n}=\pm\frac{\nabla f}{|\nabla f|}$$

4. $f(x,y,z)$ がもっとも増加する向き

発散

発散

ベクトル場 $\mathbf{f}(x, y, z) = (f_x(x, y, z), f_y(x, y, z), f_z(x, y, z))$ に対して，スカラー値関数

$$\nabla \cdot \mathbf{f} = \frac{\partial f_x}{\partial x} + \frac{\partial f_y}{\partial y} + \frac{\partial f_z}{\partial z}$$

をベクトル場 $\mathbf{f}(x, y, z)$ の**発散**という.

- 別名：ダイバージェンス
- 別表記：$\mathrm{div}\ \mathbf{f}$

発散の計算例

ベクトル場 $\mathbf{f} = \frac{xyz}{6}(x, y, z)$ の発散

$$\begin{aligned}
\nabla \cdot \mathbf{f} &= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x^2yz}{6}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{xy^2z}{6}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{xyz^2}{6}\right) \\
&= \frac{xyz}{3} + \frac{xyz}{3} + \frac{xyz}{3} \\
&= xyz
\end{aligned}$$

- 勾配：スカラー場 $\rightarrow$ ベクトル場
- 発散：ベクトル場 $\rightarrow$ スカラー場

性質

1. $\nabla \cdot (\alpha \mathbf{f} + \beta \mathbf{g}) = \alpha \nabla \cdot \mathbf{f} + \beta \nabla \cdot \mathbf{g} \quad (\alpha, \beta$ は定数$)$
2. スカラー値関数 $g(x, y, z)$ に対して

$$\nabla \cdot (g\mathbf{f}) = \nabla g \cdot \mathbf{f} + g \nabla \cdot \mathbf{f}$$

練習問題

ベクトル場 $\mathbf{r}(x, y, z) = (x, y, z)$ に対して,

$$r = |\mathbf{r}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \neq 0$$

とおき，$\nabla \cdot [f(r)\mathbf{r}]$ を r，$f(r)$，$\frac{d[f(r)]}{dr}$ を用いて表わせよ．

発散の意味

熱の流れを示す平面のベクトル場 $\mathbf{f}(x, y, z)$ に、１辺の長さが Δx, Δy の長方形をつくる

- Δy の辺から入る熱量：$f_x \Delta y$
- Δx の辺から出る熱量：$f_y \Delta x$
- y 軸方向の熱量の出入り

$$[f_x(x+\Delta x, y) - f_x(x, y)]\,\Delta y \approx \frac{\partial f_x}{\partial x}\Delta x \Delta y$$

- y 軸方向の熱量の出入り

$$\frac{\partial f_y}{\partial y}\Delta x \Delta y$$

- 単位面積当たりの熱量の出入り：$\nabla \cdot \mathbf{f}$

ラプラシアン

ラプラシアン

演算子

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

を**ラプラシアン**もしくは**ラプラス演算子**と呼ぶ.

スカラー場 $f(x, y, z)$ の勾配の発散

$$\begin{aligned} \nabla \cdot (\nabla f) &= \nabla \cdot \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z} \right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} \\ &= \left(\frac{\partial f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) f = \nabla^2 f \end{aligned}$$

回転

回転

ベクトル場 $\mathbf{f}(x,y,z) = (f_x(x,y,z), f_y(x,y,z), f_z(x,y,z))$ に対して

$$\nabla \times \mathbf{f} := \left(\frac{\partial f_z}{\partial y} - \frac{\partial f_y}{\partial z}, \frac{\partial f_x}{\partial z} - \frac{\partial f_z}{\partial x}, \frac{\partial f_y}{\partial x} - \frac{\partial f_x}{\partial y} \right) = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_x & \mathbf{e}_y & \mathbf{e}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ f_x & f_y & f_z \end{vmatrix}$$

これをベクトル場 $\mathbf{f}(x,y,z)$ の**回転**という.

- 別名：ローティション、カール
- 別表記：rot $\mathbf{f}$、curl $\mathbf{f}$

計算例

ベクトル場 $\mathbf{f} = \frac{xyz}{6}(x, y, z)$ の回転は

$$
\begin{aligned}
& \nabla \times \mathbf{f} \\
= & \begin{vmatrix} \mathbf{e}_x & \mathbf{e}_y & \mathbf{e}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{x^2yz}{6} & \frac{xy^2z}{6} & \frac{xyz^2}{6} \end{vmatrix} \\
= & \left(\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{xyz^2}{6}\right) - \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{xy^2z}{6}\right), \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{x^2yz}{6}\right) - \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{xyz^2}{6}\right), \right. \\
& \left. \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{xy^2z}{6}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{x^2yz}{6}\right) \right) \\
= & \left(\frac{x(z^2-y^2)}{6}, \frac{y(x^2-z^2)}{6}, \frac{z(y^2-x^2)}{6} \right)
\end{aligned}
$$

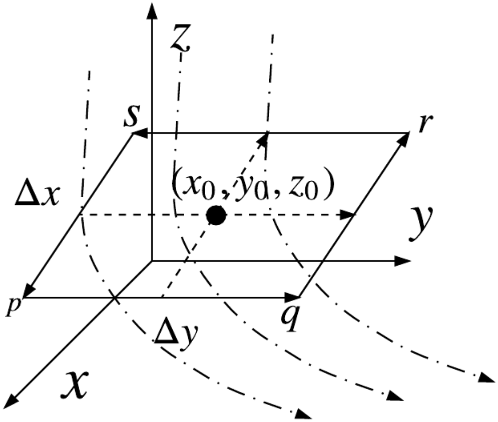
性質

1. $\nabla \times (\alpha \mathbf{f} + \beta \mathbf{g}) = \alpha \nabla \times \mathbf{f} + \beta \nabla \times \mathbf{g}$
2. スカラー場 $f(x, y, z)$ とベクトル場 $\mathbf{g}(x, y, z)$ に対し

$$\nabla \times (f\mathbf{g}) = \nabla f \times \mathbf{g} + f(\nabla \times \mathbf{g})$$

回転の意味

ベクトル場での渦巻きの流速ベクトルを表す



ベクトル場 $\mathbf{f}$

- 有向平面：法線ベクトルが z 軸の正の方向と一致
- 長方形 C の中心座標：(x_0, y_0, z_0)
- x 軸の長さ：Δx
- y 軸の長さ：Δy
- C での渦の大きさ

$$
\begin{aligned}
& f_y(x_0+\Delta x/2, y_0, z_0)\Delta y - f_x(x_0, y_0+\Delta y/2, z_0)\Delta x \\
& -f_y(x_0-\Delta x/2, y_0, z_0)\Delta y + f_x(x_0, y_0-\Delta y/2, z_0)\Delta x \\
= \; & \left(f_y(x_0+\Delta x/2, y_0, z_0) - f_y(x_0-\Delta x/2, y_0, z_0)\right)\Delta y \\
& -\left(f_x(x_0, y_0+\Delta y/2, z_0) - f_x(x_0, y_0-\Delta y/2, z_0)\right)\Delta x \\
= \; & \left(\frac{f_y(x_0+\Delta x/2, y_0, z_0) - f_y(x_0-\Delta x/2, y_0, z_0)}{\Delta x}\right)\Delta x\Delta y \\
& -\left(\frac{f_x(x_0, y_0+\Delta y/2, z_0) - f_x(x_0, y_0-\Delta y/2, z_0)}{\Delta y}\right)\Delta x\Delta y \\
\approx \; & \left(\frac{\partial f_y}{\partial x} - \frac{\partial f_x}{\partial y}\right)\Delta x\Delta y \\
= \; & (\nabla \times \mathbf{f})_z \, \Delta x\Delta y
\end{aligned}
$$