応用数学 B
ラプラス変換とフーリエ変換の応用

韓　承鎬

電気通信大学

2 月 4 日

授業評価

13:15 まで

科目番号 2186

科目名 応用数学 B

教員名 韓 承鎬

ラプラス変換

ラプラス変換

変数 x の**原関数** $f(x)$ に対して，**像関数** $\boldsymbol{F}(s)$ への**ラプラス変換**は s の関数

$$\mathscr{L}[f(x)] = \int_0^\infty e^{-sx} f(x) dx := \boldsymbol{F}(s)$$

表: ラプラス変換表

原関数 $f(x)$		像関数 $\boldsymbol{F}(s)$	
1		$\frac{1}{s}$	$s > 0$
x^n	$n \in \mathbb{Z}^+$	$\frac{n!}{s^{n+1}}$	$s > 0$
$e^{\alpha x}$		$\frac{1}{s-\alpha}$	$s > \alpha$
$xe^{\alpha x}$		$\frac{1}{(s-\alpha)^2}$	$s > \alpha$
$\cos \omega x$		$\frac{s}{s^2+\omega^2}$	$s > 0$
$\sin \omega x$		$\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$	$s > 0$
$e^{\alpha x} \cos \omega t$		$\frac{s-a}{(s-a)^2+\omega^2}$	$s > \alpha$
$e^{\alpha x} \sin \omega t$		$\frac{\omega}{(s-a)^2+\omega^2}$	$s > \alpha$

表: ラプラス変換の性質 (1)

原関数 $f(x)$	像関数 $\boldsymbol{F}(s)$
$\alpha_1 f_1(x) + \alpha_2 f_2(x)$	$\alpha_1 \boldsymbol{F}_1(s) + \alpha_2 \boldsymbol{F}_2(s)$
$f\left(\dfrac{x}{\alpha}\right)$	$\alpha \boldsymbol{F}(\alpha s)$
$e^{\alpha x} f(x)$	$\boldsymbol{F}(s-\alpha)$
$u(x-\alpha) f(x-\alpha)$	$e^{-\alpha s} \boldsymbol{F}(s)$
$x f(x)$	$-\dfrac{d\boldsymbol{F}(s)}{ds}$
$\dfrac{f(x)}{x}$	$\displaystyle\int_s^{\infty} \boldsymbol{F}(p) dp$

階段関数

$$u(x-\alpha) = \begin{cases} 0 & x < \alpha \\ 1 & x \geq \alpha \end{cases}$$

表: ラプラス変換の性質 (2)

原関数 $f(x)$	像関数 $\boldsymbol{F}(s)$
$\dfrac{df(x)}{dx}$	$s\boldsymbol{F}(s) - f(0)$
$\dfrac{d^2f(x)}{dx^2}$	$s^2\boldsymbol{F}(s) - sf(0) - \left.\dfrac{df(x)}{dx}\right\|_{x=0}$
$\int_0^x f(t)dt$	$\dfrac{1}{s}\boldsymbol{F}(s)$
$\int_0^x f_1(t)f_2(x-t)dt$	$\boldsymbol{F}_1(s)\boldsymbol{F}_2(s)$
$f_1(x)f_2(x)$	$\dfrac{1}{2\pi j}\int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty}\boldsymbol{F}_1(p)\boldsymbol{F}_2(s-p)dp$

微分の関係式証明

$$\begin{aligned}\mathscr{L}\left[\frac{df(x)}{dx}\right] &= \int_0^\infty e^{-sx}\frac{df(x)}{dx}dx = \left[e^{-sx}f(x)\right]_0^\infty + s\int_0^\infty f(x)e^{-sx}dx \\ &= \lim_{x\to\infty}\left\{e^{-sx}f(x)\right\} - f(0) + s\boldsymbol{F}(s)\end{aligned}$$

で表せるが，$s > 0$ のとき

$$\lim_{x\to\infty}\left\{e^{-sx}f(x)\right\} = 0$$

が成り立つ $f(x)$ に対しては

$$\mathscr{L}\left[\frac{df(x)}{dx}\right] = s\boldsymbol{F}(s) - f(0)$$

と簡略化できる．

常微分方程式での応用

$$\frac{d^n f(x)}{dx^n} + c_{n-1}\frac{d^{(n-1)} f(x)}{dx^{(n-1)}} + \cdots + c_1 \frac{df(x)}{dx} + c_0 f(x) = g(x)$$

原関数の m 階微分に対して，微分関係式を繰り返して適応すると

$$\begin{aligned}
\mathscr{L}\left[\frac{d^m f(x)}{dx^m}\right] &= \mathscr{L}\left[\frac{d\left(\frac{d^{(m-1)} f(x)}{dx^{(m-1)}}\right)}{dx}\right] \\
&= -\left.\frac{d^{(m-1)} f(x)}{dx^{(m-1)}}\right|_{x=0} + s\mathscr{L}\left[\frac{d^{(m-1)} f(x)}{dx^{(m-1)}}\right] \\
&= -\left.\frac{d^{(m-1)} f(x)}{dx^{(m-1)}}\right|_{x=0} + s\left(-\left.\frac{d^{(m-2)} f(x)}{dx^{(m-2)}}\right|_{x=0} + s\mathscr{L}\left[\frac{d^{(m-2)} f(x)}{dx^{(m-2)}}\right]\right) \\
&= s^m \boldsymbol{F}(s) - \sum_{i=1}^{m} s^{(m-i)} \left.\frac{d^{(m-i)} f(x)}{dx^{(m-i)}}\right|_{x=0}
\end{aligned}$$

常微分方程式での応用

ラプラス変換の線形性より，両辺にラプラス変換を行うと

$$\mathscr{L}\left[\sum_{m=0}^{n} c_m \frac{d^m f(x)}{dx^m}\right] = \sum_{m=0}^{n} c_m \mathscr{L}\left[\frac{d^m f(x)}{dx^m}\right]$$

$$= \quad \boldsymbol{F}(s)\sum_{m=0}^{n} c_m s^m - \sum_{m=0}^{n} c_m \sum_{i=1}^{m} s^{(m-i)} \left.\frac{d^{(m-i)} f(x)}{dx^{(m-i)}}\right|_{x=0} = \mathscr{L}\left[g(x)\right]$$

が得られる．従って，像関数は

$$\boldsymbol{F}(s) = \frac{\mathscr{L}\left[g(x)\right] + \sum_{m=0}^{n} c_m \sum_{i=1}^{m} s^{(m-i)} \left.\frac{d^{(m-i)} f(x)}{dx^{(m-i)}}\right|_{x=0}}{\sum_{m=0}^{n} c_m s^m}$$

対応する原関数を見いだすと，微分方程式の解が求まる．

一階同次微分方程式

$$\frac{df(x)}{dx} + c_0 f(x) = 0$$

両辺にラプラス変換を行うと

$$s\boldsymbol{F}(s) - f(0) + c_0\boldsymbol{F}(s) = 0$$

なるので，像関数は

$$\boldsymbol{F}(s) = \frac{f(0)}{s + c_0}$$

で表せる．表 1 より対応する原関数は

$$f(x) = f(0)e^{-c_0 x}$$

となる．

二階非同次微分方程式

$$\frac{d^2 f(x)}{dx^2} + c_0^2 f(x) = \alpha \cos \omega x$$

両辺にラプラス変換を行うと

$$s^2 \boldsymbol{F}(s) - sf(0) - \left.\frac{df(x)}{dx}\right|_{x=0} + c_0^2 \boldsymbol{F}(s) = \frac{\alpha s}{s^2 + \omega^2}$$

なるので

$$\boldsymbol{F}(s) = \frac{sf(0) + \left.\frac{df(x)}{dx}\right|_{x=0}}{s^2 + c_0^2} + \frac{\alpha s}{(s^2 + c_0^2)(s^2 + \omega^2)}$$

第一項は表 1 より

$$f(0) \underbrace{\frac{s}{s^2 + c_0^2}}_{\cos c_0 x} + \frac{\left.\frac{df(x)}{dx}\right|_{x=0}}{c_0} \underbrace{\frac{c_0}{s^2 + c_0^2}}_{\sin c_0 x}$$

第二項は**部分分数展開法**を用いて変形

$$\frac{\alpha s}{(s^2+c_0^2)(s^2+\omega^2)} = \beta_1 \frac{s}{s^2+\omega^2} + \beta_2 \frac{s}{s^2+c_0^2}$$

が成り立つとすると

$$\frac{\alpha s}{(s^2+c_0^2)(s^2+\omega^2)} = \frac{s^3(\beta_1+\beta_2)+s(\beta_1 c_0^2+\beta_2\omega^2)}{(s^2+c_0^2)(s^2+\omega^2)}$$

連立方程式

$$\left\{ \begin{array}{ccc} \beta_1+\beta_2 & = & 0 \\ \beta_1 c_0^2+\beta_2\omega^2 & = & \alpha \end{array} \right. \Rightarrow \beta_1 = -\beta_2 = \frac{\alpha}{c_0^2-\omega^2}$$

表 1 より

$$\frac{\alpha}{c_0^2-\omega^2}\left(\underbrace{\frac{s}{s^2+\omega^2}}_{\cos\omega x} - \underbrace{\frac{s}{s^2+c_0^2}}_{\cos c_0 x} \right)$$

第一項と第二項の結果を統合

$$f(x) = f(0)\cos c_0 x + \frac{\left.\frac{df(x)}{dx}\right|_{x=0}}{c_0}\sin c_0 x + \frac{\alpha}{c_0^2 - \omega^2}\left(\cos\omega x - \cos c_0 x\right)$$

ラプラス変換

完備な基底

関数の集合が

1. 独立（直行）性：集合の任意の要素関数は，他の要素関数の組合わせで表現することができない．
2. 完備性：すべての関数は，集合の要素関数の組み合で表現できる．

三角関数基底

三角関数からなる完備な基底

$$\left\{ \frac{1}{T}, \frac{2}{T}\cos m\omega_0 x, \frac{2}{T}\sin m\omega_0 x \right\}_{m\in\mathbb{Z}^+}$$

$\omega_0 = 2\pi f = \frac{2\pi}{T}$($T$ は周期)

周期関数の三角関数基底表現

周期 T の関数 $f(x)$ をフーリエ級数展開した場合の一般式

$$\begin{aligned} f(x) &= \rho_0 + \alpha_1 \cos\omega_0 x + \beta_1 \sin\omega_0 x + \alpha_2 \cos 2\omega_0 x + \beta_2 \cos 2\omega_0 x + \cdots \\ &\quad \cdots + \alpha_m \cos m\omega_0 x + \beta_m \sin m\omega_0 x + \cdots \\ &= \rho_0 + \sum_{m=1}^{\infty} \left[\alpha_m \cos m\omega_0 x + \beta_m \sin m\omega_0 x\right] \end{aligned}$$

三角関数基底での係数

$$\begin{cases} \rho_0 &= \dfrac{1}{T}\displaystyle\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(x)dx \\ \alpha_m &= \dfrac{2}{T}\displaystyle\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(x)\cos m\omega_0 x dx;\ \ m \in \mathbb{Z}^+ \\ \beta_m &= \dfrac{2}{T}\displaystyle\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(x)\sin m\omega_0 x dx;\ \ m \in \mathbb{Z}^+ \end{cases}$$

m 倍数波成分の統合

周期関数の三角関数基底表現

$$f(x) = \rho_0 + \sum_{m=1}^{\infty} [\alpha_m \cos m\omega_0 x + \beta_m \sin m\omega_0 x]$$

$$\begin{cases} \rho_m = \sqrt{\alpha_m^2 + \beta_m^2} \\ \phi_0 = 0 \\ \phi_m = -\tan^{-1} \dfrac{\beta_m}{\alpha_m} \end{cases}$$

とおくと

$$f(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \rho_m \cos(m\omega_0 x + \phi_m)$$

不素数基底

複素指数基底

オイラーの公式

$$e^{j\omega} = \cos\omega + j\sin\omega$$

同じ周波数の三角関数を複素数 j で結合し， $n \in \mathbb{Z}$ に拡張

$$\left\{ \frac{1}{T} e^{jm\omega_0 x} \right\}_{m\in\mathbb{Z}}$$

複素フーリエ級数展開

$$f(x) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \gamma_m e^{jn\omega_0 x}$$

係数

$$\begin{aligned} \gamma_0 &= \rho_0 \\ \gamma_m &= \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(x) e^{-jm\omega_0 x} dx \\ &= \frac{1}{2}(\alpha_m - j\beta_m) = \frac{\rho_m}{2} e^{j\phi_m} \end{aligned}$$

三角関数基底係数との関係

$$\left\{ \begin{aligned} \gamma_0 &= \rho_0 \\ \gamma_{-m} &= \tfrac{1}{2}(\alpha_m + j\beta_m) \\ \gamma_m &= \tfrac{1}{2}(\alpha_m - j\beta_m) \end{aligned} \right.$$

非周期関数のフーリエ変換

$$\gamma_m = \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t)e^{-jm\omega_0 x}dx$$

非周期関数 $T \to \infty(\omega_0 \to 0)$ の場合は 0

- **フーリエ変換**

$$\mathscr{F}[f(x)] = \lim_{T\to\infty} T\gamma_m = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-j\omega x}dx = \mathcal{F}(\omega)$$

- **逆フーリエ変換**

$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{F}(\omega)e^{j\omega x}d\omega = \mathscr{F}^{-1}[\mathcal{F}(\omega)]$$

波動方程式での応用

波動方程式

$$\frac{\partial^2 f(x,t)}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 f(x,t)}{\partial x^2} = 0$$

を境界条件

$$f(0,t) = f(L,t) = 0$$

及び初期条件

$$\begin{cases} f(x,0) & = & f_0(x) \\ \left.\frac{\partial f(x,t)}{\partial t}\right|_{t=0} & = & f_1(x) \end{cases}$$

での解を求める.

境界条件より求めた解

$$f(x,t)=\sum_{m=1}^{\infty}\sin\frac{m\pi x}{L}\left(\beta_{1,m}\cos\frac{m\pi ct}{L}+\beta_{2,m}\sin\frac{m\pi ct}{L}\right)$$

を初期条件に代入

$$\begin{cases} f(x,0) &= \displaystyle\sum_{m=1}^{\infty}\beta_{1,m}\sin\frac{m\pi x}{L}=f_0(x) \\ \left.\frac{\partial f(x,t)}{\partial t}\right|_{t=0} &= \displaystyle\sum_{m=1}^{\infty}\beta_{2,m}\frac{m\pi c}{L}\sin\frac{m\pi x}{L}=f_1(x) \end{cases}$$

一方，三角関数基底表現に，$\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$ を代入

$$
\begin{aligned}
f(x) &= \rho_0 + \sum_{m=1}^{\infty} \left[\alpha_m \cos \frac{2m\pi}{T} x + \beta_m \sin \frac{2m\pi}{T} x \right] \\
&\overset{T=2L}{=} \rho_0 + \sum_{m=1}^{\infty} \left[\alpha_m \cos \frac{m\pi}{L} x + \beta_m \sin \frac{m\pi}{L} x \right]
\end{aligned}
$$

$f_0(x)$ 及び $f_1(x)$ のフーリエ級数展開より

$$
\begin{cases}
\beta_{1,m} = \dfrac{1}{L} \displaystyle\int_{-L}^{L} f_0(x) \sin \frac{m\pi}{L} x dx = \dfrac{2}{L} \displaystyle\int_{0}^{L} f_0(x) \sin \frac{m\pi}{L} x dx \\
\beta_{2,m} = \dfrac{1}{m\pi c} \displaystyle\int_{-L}^{L} f_1(x) \sin \frac{m\pi}{L} x dx = \dfrac{2}{m\pi c} \displaystyle\int_{0}^{L} f_1(x) \sin \frac{m\pi}{L} x dx
\end{cases}
$$

波動方程式の例

波動方程式に境界条件 $f(0,t)=f(L,t)=0$ 及び初期条件

$$\begin{aligned} f(x,0) &= \begin{cases} \frac{2A}{L}x & 0 \le x \le \frac{L}{2} \\ \frac{2A}{L}(L-x) & \frac{L}{2} \le x \le L \end{cases} \\ \left.\frac{\partial f(x,t)}{\partial t}\right|_{t=0} &= 0 \end{aligned}$$

が与えられた場合

$$\begin{aligned} \beta_{1,m} &= \frac{2}{L}\int_0^L \frac{2A}{L}x \sin\frac{m\pi}{L}x dx + \frac{2}{L}\int_0^L \frac{2A}{L}(L-x)\sin\frac{m\pi}{L}x dx \\ &= \frac{8A}{m^2\pi^2}\sin\frac{m\pi}{2} \\ \beta_{2,m} &= 0 \end{aligned}$$

より

$$f(x,t) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{8A}{m^2\pi^2}\sin\frac{m\pi}{2}\sin\frac{m\pi x}{L}\cos\frac{m\pi ct}{L}$$

拡散方程式での応用

拡散方程式の境界条件 $f(0,t)=f(L,t)=0$ が与えられた場合，$f_x(x)=0$ 以外の解は

$$f(x,t)=\sum_{m=1}^{\infty}\alpha_{2,m}\sin\frac{m\pi x}{L}e^{-c^2\left(\frac{m\pi}{L}\right)^2 t}$$

従って，初期条件

$$f(x,0)=\sum_{m=1}^{\infty}\alpha_{2,m}\sin\frac{m\pi x}{L}=f_0(x)$$

が与えられたとき，係数は

$$\alpha_{2,m}=\frac{2}{L}\int_0^L f_0(x)\sin\frac{m\pi x}{L}dx$$

拡散方程式の例

初期条件が

$$f(x,0) = Ax(L-x)$$

の場合

$$\alpha_{2,m} = \frac{2}{L}\int_0^L Ax(L-x)\sin\frac{m\pi x}{L}dx = \frac{4AL^2(1-\cos m\pi)}{m^3\pi^3}$$

なので

$$f(x,t) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{4AL^2(1-\cos m\pi)}{m^3\pi^3}\sin\frac{m\pi x}{L}e^{-c^2\left(\frac{m\pi}{L}\right)^2 t}$$

ラプラス方程式での応用

ラプラス方程式の $f(0, y) = f(a, y) = 0$ の一般解

$$f(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} \sin \frac{m\pi x}{a} \left(\beta_{1,m} e^{\frac{m\pi y}{a}} + \beta_{2,m} e^{-\frac{m\pi y}{a}} \right)$$

に対して，y に対する境界条件

$$f(x, 0) = f_0(x), \quad f(x, b) = 0$$

が与えられた場合，$f(x, b) = 0$ より

$$\beta_{2,m} = -\beta_{1,m} e^{\frac{2m\pi b}{a}}$$

$$\begin{aligned} f(x,y) &= \sum_{m=1}^{\infty} \beta_{1,m} \sin \frac{m\pi x}{a} \left(e^{\frac{m\pi y}{a}} - e^{\frac{2m\pi b}{a} - \frac{m\pi y}{a}} \right) \\ &= \sum_{m=1}^{\infty} \underbrace{-2\beta_{1,m} e^{\frac{m\pi b}{a}}}_{\beta_m} \sin \frac{m\pi x}{a} \sinh \frac{m\pi(b-y)}{a} \\ &= \sum_{m=1}^{\infty} \beta_m \sin \frac{m\pi x}{a} \sinh \frac{m\pi(b-y)}{a} \end{aligned}$$

境界条件 $f(x,0) = f_0(x)$ より

$$f(x,0) = \sum_{m=1}^{\infty} \beta_m \sinh \frac{m\pi b}{a} \sin \frac{m\pi x}{a} = f_0(x)$$

と表せるので，係数は

$$\beta_m = 2\sinh^{-1} \frac{m\pi b}{a} \int_0^a f_0(x) \sin \frac{m\pi x}{a} dx$$

ラプラス方程式の例

境界条件に

$$f(x,0) = \sin\frac{\pi x}{a}, \quad f(x,b) = 0$$

を追加した場合，三角関数基底の直交性により

$$\beta_m = 0, \quad \text{for} \quad m \neq 1$$

となる．
一方，$m = 1$ の場合は

$$\beta_1 = 2\sinh^{-1}\frac{\pi b}{a}\int_0^a \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right)^2 dx = \sinh^{-1}\frac{\pi b}{a}$$

なので

$$f(x,t) = \sinh^{-1}\frac{\pi b}{a}\sin\frac{\pi x}{a}\sinh\frac{\pi(b-y)}{a}$$