応用数学 B

ラプラス変換とフーリエ変換の応用

韓　承鎬

電気通信大学

February 7, 2020

定義

ラプラス変換

変数 x の**原関数** $f(x)$ に対して，**像関数** $\boldsymbol{F}(s)$ への**ラプラス変換**は s の関数

$$\mathscr{L}[f(x)] = \int_0^\infty e^{-sx} f(x) dx := \boldsymbol{F}(s)$$

で定義される．

原関数 $f(x)$		像関数 $\boldsymbol{F}(s)$	
1		$\frac{1}{s}$	$s > 0$
x^n	$n \in \mathbb{Z}^+$	$\frac{n!}{s^{n+1}}$	$s > 0$
$e^{\alpha x}$		$\frac{1}{s-\alpha}$	$s > \alpha$
$xe^{\alpha x}$		$\frac{1}{(s-\alpha)^2}$	$s > \alpha$
$\cos \omega x$		$\frac{s}{s^2+\omega^2}$	$s > 0$
$\sin \omega x$		$\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$	$s > 0$
$e^{\alpha x} \cos \omega t$		$\frac{s-a}{(s-a)^2+\omega^2}$	$s > \alpha$
$e^{\alpha x} \sin \omega t$		$\frac{\omega}{(s-a)^2+\omega^2}$	$s > \alpha$

原関数 $f(x)$	像関数 $\boldsymbol{F}(s)$
$\alpha_1 f_1(x) + \alpha_2 f_2(x)$	$\alpha_1 \boldsymbol{F}_1(s) + \alpha_2 \boldsymbol{F}_2(s)$
$f'(x)$	$s\boldsymbol{F}(s) - f(0)$
$f''(x)$	$s^2\boldsymbol{F}(s) - sf(0) - f'(x)\big\rvert_{x=0}$
$\int_0^x f(t)dt$	$\frac{1}{s}\boldsymbol{F}(s)$
$e^{\alpha x} f(x)$	$\boldsymbol{F}(s-\alpha)$
$u(x-\alpha)f(x-\alpha)$	$e^{-\alpha s}\boldsymbol{F}(s)$
$f\left(\frac{x}{\alpha}\right)$	$\alpha\boldsymbol{F}(\alpha s)$
$\int_0^x f_1(t)f_2(x-t)dt$	$\boldsymbol{F}_1(s)\boldsymbol{F}_2(s)$
$f_1(x)f_2(x)$	$\frac{1}{2\pi j}\int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty} \boldsymbol{F}_1(p)\boldsymbol{F}_2(s-p)dp$
$xf(x)$	$-\boldsymbol{F}'(s)$
$\frac{f(x)}{x}$	$\int_s^\infty \boldsymbol{F}(p)dp$

$f'(x)$ のラプラス変換

$$
\begin{aligned}
\mathscr{L}\left[f'(x)\right] &= \int_0^\infty e^{-sx} f'(x)dx = \left[e^{-sx} f(x)\right]_0^\infty + s\int_0^\infty f(x)e^{-sx}dx \\
&= \lim_{x\to\infty}\left\{e^{-sx} f(x)\right\} - f(0) + s\boldsymbol{F}(s)
\end{aligned}
$$

で表せるが，$s > 0$ のとき

$$
\lim_{x\to\infty}\left\{e^{-sx} f(x)\right\} = 0
$$

が成り立つ $f(x)$ に対しては

$$
\mathscr{L}\left[f'(x)\right] = s\boldsymbol{F}(s) - f(0)
$$

と簡略化できる．

$f^{(m)}(x)$ のラプラス変換

$$
\begin{aligned}
\mathscr{L}\left[f^{(m)}(x)\right] &= \mathscr{L}\left[\frac{d\left(f^{(m-1)}(x)\right)}{dx}\right] \\
&= -\left. f^{(m-1)}(x)\right|_{x=0} + s\mathscr{L}\left[f^{(m-1)}(x)\right] \\
&= -\left. f^{(m-1)}(x)\right|_{x=0} \\
&\quad +s\left(-\left. f^{(m-2)}(x)\right|_{x=0} + s\mathscr{L}\left[f^{(m-2)}(x)\right]\right) \\
&= s^m \boldsymbol{F}(s) - \sum_{i=1}^{m} s^{i-1} \left. f^{(m-i)}(x)\right|_{x=0}
\end{aligned}
$$

n 階の定係数常微分方程式のラプラス変換

$$f^{(n)}(x)+c_{n-1}f^{(n-1)}(x)+\cdots+c_1 f'(x)+c_0 f(x) = \sum_{m=0}^{n} c_m f^{(m)}(x) = g(x)$$

ラプラス変換の線形性より，両辺にラプラス変換を行うと

$$\begin{aligned}
\mathscr{L}\left[\sum_{m=0}^{n} c_m f^{(m)}(x)\right] &= \sum_{m=0}^{n} c_m \mathscr{L}\left[f^{(m)}(x)\right] \\
= \quad \boldsymbol{F}(s)\sum_{m=0}^{n} c_m s^m &- \sum_{m=0}^{n} c_m \sum_{i=1}^{m} s^{i-1}\ f^{(m-i)}(x)\Big|_{x=0} = \mathscr{L}\left[g(x)\right]
\end{aligned}$$

$$\boldsymbol{F}(s) = \frac{\mathscr{L}\left[g(x)\right] + \sum_{m=0}^{n} c_m \sum_{i=1}^{m} s^{i-1}\ f^{(m-i)}(x)\Big|_{x=0}}{\sum_{m=0}^{n} c_m s^m}$$

例：$f''(x) + c_0^2 f(x) = \alpha \cos \omega x$

- 両辺にラプラス変換

$$s^2 \boldsymbol{F}(s) - sf(0) - f'(x)\big|_{x=0} + c_0^2 \boldsymbol{F}(s) = \frac{\alpha s}{s^2 + \omega^2}$$

なるので

$$\boldsymbol{F}(s) = \frac{sf(0) + f'(x)|_{x=0}}{s^2 + c_0^2} + \frac{\alpha s}{(s^2 + c_0^2)(s^2 + \omega^2)}$$

- 第一項は，変換表より

$$f(0) \underbrace{\frac{s}{s^2 + c_0^2}}_{\cos c_0 x} + \frac{f'(x)|_{x=0}}{c_0} \underbrace{\frac{c_0}{s^2 + c_0^2}}_{\sin c_0 x}$$

- 第二項は部分分数展開法

$$\frac{\alpha s}{(s^2+c_0^2)(s^2+\omega^2)} = \beta_1 \frac{s}{s^2+\omega^2} + \beta_2 \frac{s}{s^2+c_0^2}$$

が成り立つとすると

$$\frac{\alpha s}{(s^2+c_0^2)(s^2+\omega^2)} = \frac{s^3(\beta_1+\beta_2)+s(\beta_1 c_0^2+\beta_2\omega^2)}{(s^2+c_0^2)(s^2+\omega^2)}$$

となるので，連立方程式

$$\begin{cases} \beta_1+\beta_2 &= 0 \\ \beta_1 c_0^2+\beta_2\omega^2 &= \alpha \end{cases}$$

より

$$\beta_1 = -\beta_2 = \frac{\alpha}{c_0^2-\omega^2}$$

- 変換表より、第二項は

$$\frac{\alpha}{c_0^2-\omega^2}\left(\underbrace{\frac{s}{s^2+\omega^2}}_{\cos\omega x}-\underbrace{\frac{s}{s^2+c_0^2}}_{\cos c_0 x}\right)$$

- 第一項と第二項の結果を統合

$$f(x)=f(0)\cos c_0 x+\frac{f'(x)|_{x=0}}{c_0}\sin c_0 x+\frac{\alpha}{c_0^2-\omega^2}\left(\cos\omega x-\cos c_0 x\right)$$

基底

完備な基底

関数の集合が

1. 独立（直行）性：集合の任意の要素関数は，他の要素関数の組合わせで表現することができない．
2. 完備性：すべての関数は，集合の要素関数の組み合で表現できる．

三角関数基底

定数と角周波数が $\omega_0 = 2\pi f = \frac{2\pi}{T}$ (T は周期) となる三角関数ならなる完備な基底

$$\left\{ \frac{1}{T}, \frac{2}{T} \cos m\omega_0 x, \frac{2}{T} \sin m\omega_0 x \right\}_{m \in \mathbb{Z}^+}$$

フーリエ係数

周期 T の関数 $f(x)$ をフーリエ級数展開した場合の一般式

$$f(x) = \rho_0 + \sum_{m=1}^{\infty} [\alpha_m \cos m\omega_0 x + \beta_m \sin m\omega_0 x]$$

の**フーリエ係数**は，三角関数基底での係数

$$\begin{cases} \rho_0 = \dfrac{1}{T}\displaystyle\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(x)dx \\ \alpha_m = \dfrac{2}{T}\displaystyle\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(x)\cos m\omega_0 x dx; \quad m \in \mathbb{Z}^+ \\ \beta_m = \dfrac{2}{T}\displaystyle\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(x)\sin m\omega_0 x dx; \quad m \in \mathbb{Z}^+ \end{cases}$$

定義

フーリエ変換

- フーリエ変換

$$\mathscr{F}[f(x)] = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-j\omega x} dx = \mathcal{F}(\omega)$$

- 逆フーリエ変換

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{F}(\omega) e^{j\omega x} d\omega = \mathscr{F}^{-1}[\mathcal{F}(\omega)]$$

原関数 $f(x)$	像関数 $\mathcal{F}(\omega)$
$\alpha_1 f_1(x) + \alpha_2 f_2(x)$	$\alpha_1 \mathcal{F}_1(\omega) + \alpha_2 \mathcal{F}_2(\omega)$
$f^{(n)}(x)$	$(j\omega)^n \mathcal{F}(s)$
$e^{j\omega_0 x} f(x)$	$\mathcal{F}(\omega - \omega_0)$
$f(x - x_0)$	$e^{-j\omega x_0} \mathcal{F}(\omega)$
$f(\alpha x)$	$\frac{1}{\lvert\alpha\rvert} \mathcal{F}\left(\frac{\omega}{\alpha}\right)$

波動方程式での応用

波動方程式での応用

波動方程式を, 境界条件 $f(0,t)=f(L,t)=0$ 及び初期条件

$$\begin{cases} f(x,0) & = & f_0(x) \\ \left.\frac{\partial f(x,t)}{\partial t}\right|_{t=0} & = & f_1(x) \end{cases}$$

での解を求める.

境界条件 $f(0,t)=f(L,t)=0$ より求めた解

$$f(x,t)=\sum_{m=1}^{\infty}\sin\frac{m\pi x}{L}\left(\beta_{1,m}\cos\frac{m\pi ct}{L}+\beta_{2,m}\sin\frac{m\pi ct}{L}\right)$$

を初期条件に代入すると

$$\begin{cases} f(x,0) &= \displaystyle\sum_{m=1}^{\infty}\beta_{1,m}\sin\frac{m\pi x}{L}=f_0(x) \\ \left.\frac{\partial f(x,t)}{\partial t}\right|_{t=0} &= \displaystyle\sum_{m=1}^{\infty}\beta_{2,m}\frac{m\pi c}{L}\sin\frac{m\pi x}{L}=f_1(x) \end{cases}$$

一方，$f(x)$ を $\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$ とし、フーリエ級数展開すると

$$f(x) = \rho_0 + \sum_{m=1}^{\infty}\left[\alpha_m \cos\frac{2m\pi}{T}x + \beta_m \sin\frac{2m\pi}{T}x\right]$$

となるので，$\beta_{1,m}$ と $\beta_{2,m}$ は $f_0(x)$ 及び $f_1(x)$ を周期 $T = 2L$ としたフーリエ級数展開になる。

$$\begin{cases} \beta_{1,m} = \dfrac{1}{L}\displaystyle\int_{-L}^{L} f_0(x)\sin\frac{m\pi}{L}xdx = \frac{2}{L}\int_0^L f_0(x)\sin\frac{m\pi}{L}xdx \\ \beta_{2,m} = \dfrac{1}{m\pi c}\displaystyle\int_{-L}^{L} f_1(x)\sin\frac{m\pi}{L}xdx = \frac{2}{m\pi c}\int_0^L f_1(x)\sin\frac{m\pi}{L}xdx \end{cases}$$

で計算できる.

例

波動方程式を初期条件

$$
\begin{aligned}
f(x,0) &= \begin{cases} \frac{2A}{L}x & 0 \le x \le \frac{L}{2} \\ \frac{2A}{L}(L-x) & \frac{L}{2} \le x \le L \end{cases} \\
\left.\frac{\partial f(x,t)}{\partial t}\right|_{t=0} &= 0
\end{aligned}
$$

での解は、初期条件を代入すると

$$
\begin{aligned}
\beta_{1,m} &= \frac{2}{L}\int_0^{L/2} \frac{2A}{L} x \sin\frac{m\pi}{L} x dx + \frac{2}{L}\int_{L/2}^{L} \frac{2A}{L}(L-x)\sin\frac{m\pi}{L} x dx \\
&= \frac{8A}{m^2\pi^2}\sin\frac{m\pi}{2} \\
\beta_{2,m} &= 0
\end{aligned}
$$

より

$$
f(x,t) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{8A}{m^2\pi^2}\sin\frac{m\pi}{2}\sin\frac{m\pi x}{L}\cos\frac{m\pi ct}{L}
$$