応用数学 B

韓　承鎬

電気通信大学

第一回目

科目情報

- 科目名：応用数学Ｂ
- Web: http://hanlab.jp/lecture.html
- 講師氏名：韓　承鎬（ハン　スンホ）
- 参考資料：講義の内容に関する資料はホームページで公開
- 最終成績：中間試験と期末試験の成績に基づいて評価

講義方法

- 講義の進行：主にスライド
- 受講：HP の資料を手元に用意
- 演習問題：授業中に行う
- オフィスアワー：いつでも可（事前連絡必要）
- 意見要望：西２号館一階の韓宛てレポート提出箱（３番）

記号

α	定数
a	スカラー，点
$\mathbf{a}$	ベクトル
C	線
$\mathbb{S}$	面
$\mathbf{S}$	有向平面
$\mathcal{V}$	体積
f_x	ベクトル $\mathbf{f}$ の x 成分
$f(x)$	x を変数とするスカラー値関数
$\mathbf{f}(x)$	x を変数とするベクトル値関数
$f_x(x)$	x を変数とするベクトル値関数 $\mathbf{f}(x)$ の x 成分

ベクトル

ベクトル

大きさのみを持つ量を**スカラー**といい，大きさと向きを持つ量を**ベクトル**という．

表現	矢印の長さで大きさ，方向で向き
大きさ	絶対値記号を用いて $|\mathbf{a}|$
零ベクトル	大きさが 0 のベクトル，$\mathbf{0}$ で表す
相等	ベクトル $\mathbf{a}$ と $\mathbf{b}$ の**大きさが等しく**，向きが平行または同一直線上にあるとき

$$\mathbf{a} = \mathbf{b} \Leftrightarrow (|\mathbf{a}| = |\mathbf{b}|) \wedge (\mathbf{a} \parallel \mathbf{b})$$

ベクトルの成分

位置ベクトルとベクトルの成分

座標空間において，原点を始点とするベクトル $\mathbf{a}$ の終点を a としたとき，$\mathbf{a}$ を点 a の**位置ベクトル**という．点 a の座標が (a_x, a_y, a_z) であるとき，(a_x, a_y, a_z) を $\mathbf{a}$ の成分といい，$\mathbf{a} = (a_x, a_y, a_z)$ と表す．ここで，a_x，a_y，a_z は順に $\mathbf{a}$ の $\mathbf{x}$ 成分，$\mathbf{y}$ 成分，$\mathbf{z}$ 成分という．

二次元平面、極座標系、球座標系においても類似な定義ができるが、ここでは三次元の直行座標系に限定する

基本ベクトル

基本ベクトル基本ベクトル

x,y,z 軸の正の方向を向いた大きさが 1 のベクトル

$$\mathbf{e}_x = (1,0,0),\ \mathbf{e}_y = (0,1,0),\ \mathbf{e}_z = (0,0,1)$$

はそれぞれ x，y，z 軸上の**単位ベクトル**となり，これらを座標空間の**基本ベクトル**という．

$\mathbf{a} = (a_x, a_y, a_z)$ のとき，基本ベクトルを用いて

$$\mathbf{a} = a_x\mathbf{e}_x + a_y\mathbf{e}_y + a_z\mathbf{e}_z$$

で表せる．

ベクトルの和と積

ベクトルの和

ベクトル $\mathbf{a}$ と $\mathbf{b}$ が与えられたとき，$\mathbf{a}$ の終点に $\mathbf{b}$ の始点を合わせ，$\mathbf{a}$ の始点から $\mathbf{b}$ の終点に至るベクトルを $\mathbf{a}+\mathbf{b}$ と定義する．

性質

1. 交換則：$\mathbf{a}+\mathbf{b}=\mathbf{b}+\mathbf{a}$
2. 結合則：$(\mathbf{a}+\mathbf{b})+\mathbf{c}=\mathbf{a}+(\mathbf{b}+\mathbf{c})$

ベクトルのスカラー積

ベクトル $\mathbf{a}$ と実数 α に対して，ベクトルのスカラー倍 $\alpha\mathbf{a}$ は

- $\alpha > 0$ のときは，$\mathbf{a}$ と同一直線上同じ向きで，大きさ α 倍のベクトル
- $\alpha = 0$ のときは，零ベクトル $\mathbf{0}$
- $\alpha < 0$ のときは，$\mathbf{a}$ と同一直線上反対の向きで，大きさ $|\alpha|$ 倍のベクトル

1. $|\alpha\mathbf{a}| = |\alpha||\mathbf{a}|$
2. $\alpha(\beta\mathbf{a}) = (\alpha\beta)\mathbf{a}$
3. $\alpha(\mathbf{a} + \mathbf{b}) = \alpha\mathbf{a} + \alpha\mathbf{b}$
4. $(\alpha + \beta)\mathbf{a} = \alpha\mathbf{a} + \beta\mathbf{a}$

成分での表すと

1. $(a_x, a_y, a_z) \pm (b_x, b_y, b_z) = (a_x \pm b_x, a_y \pm b_y, a_z \pm b_z)$
2. $\alpha(a_z, a_y, a_z) = (\alpha a_x, \alpha a_y, \alpha a_z)$

ベクトルの内積

ベクトルの内積

$\mathbf{0}$ でない二つのベクトル $\mathbf{a}$,$\mathbf{b}$ に対して，内積（スカラー積）を

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = |\mathbf{a}||\mathbf{b}| \cos \theta$$

と定める．ここで，θ は $\mathbf{a}$ と $\mathbf{b}$ の始点を一致させたときに二つのベクトルがなす角度である．零ベクトルに対しては，
$\mathbf{0} \cdot \mathbf{0} = \mathbf{0} \cdot \mathbf{a} = \mathbf{a} \cdot \mathbf{0} = 0$ と定める．

内積の性質

1. $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = \mathbf{b}\cdot\mathbf{a}$
2. $(\alpha\mathbf{a})\cdot\mathbf{b} = \mathbf{a}\cdot(\alpha\mathbf{b}) = \alpha(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})$
3. $\mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}+\mathbf{c}) = \mathbf{a}\cdot\mathbf{b}+\mathbf{a}\cdot\mathbf{c}$
4. 基本ベクトルに対して
$$\mathbf{e}_x\cdot\mathbf{e}_x = \mathbf{e}_y\cdot\mathbf{e}_y = \mathbf{e}_z\cdot\mathbf{e}_z = 1, \quad \mathbf{e}_x\cdot\mathbf{e}_y = \mathbf{e}_y\cdot\mathbf{e}_z = \mathbf{e}_z\cdot\mathbf{e}_x = 0$$
が成り立つ．
5. 座標空間では $\mathbf{a} = (a_x, a_y, a_z)$,$\mathbf{b} = (b_x, b_y, b_z)$ のとき
$$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z, \quad |\mathbf{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$$
である．

問題：ベクトル $\mathbf{a} = (-1, 0, 7)$ と $\mathbf{b} = (-4, 5, 3)$ がなす角 θ を求めよ．

面積ベクトル

単位法線ベクトル

空間内の表と裏が指定された**有向平面 S** に対し，**S** に垂直で裏から表方向を向いた単位ベクトル $\mathbf{n}$ を **S** の**単位法線ベクトル**という．

面積ベクトル

S の平面上の閉曲線 C によって囲まれた領域 $\mathbb{C}$ の面積を α とする．そのとき，ベクトル $\mathbf{c} = \alpha\mathbf{n}$ を領域 $\mathbb{C}$ の**面積ベクトル**という．

曲線の向き

点 p が閉曲線 C 上を $\mathbb{C}$ の内部を左手に見る向きにまわるとき，右ネジの進む方向が **S** の単位法線ベクトルと一致するならば，閉曲線を**正の向きに回る**という．

外積

外積

2 つのベクトル $\mathbf{a}$ と $\mathbf{b}$ を両辺とする平行四辺形 $\mathbb{S}$ に対し，この平面で垂直かつ $\mathbf{a}$ から $\mathbf{b}$ へ最短で右ねじを回すときねじが進む方向を表とすると，$\mathbb{S}$ の面積ベクトルを $\mathbf{a}$ と $\mathbf{b}$ の**外積**と呼び $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ で表す．なお

$$\mathbf{0} \times \mathbf{0} = \mathbf{0}, \quad \mathbf{0} \times \mathbf{a} = \mathbf{0}$$

と定める．

$\mathbf{a} = (a_x, a_y, a_z)$, $\mathbf{b} = (b_x, b_y, b_z)$ のとき，外積を成分で表せば

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \left(\begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_z & a_x \\ b_z & b_x \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix} \right) = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_x & \mathbf{e}_y & \mathbf{e}_z \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}$$

となる．

外積の法則

外積については，次の法則が成り立つ．

1. $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = -\mathbf{b} \times \mathbf{a}$
2. $|\mathbf{a} \times \mathbf{b}| = |\mathbf{a}||\mathbf{b}| \sin\theta$
3. $\alpha\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \mathbf{a} \times \alpha\mathbf{b} = \alpha(\mathbf{a} \times \mathbf{b})$
4. $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = \mathbf{a} \times \mathbf{b} + \mathbf{a} \times \mathbf{c}$, $(\mathbf{b} + \mathbf{c}) \times \mathbf{a} = \mathbf{b} \times \mathbf{a} + \mathbf{c} \times \mathbf{a}$
5. $\mathbf{a} \parallel \mathbf{b} \Leftrightarrow \mathbf{a} \times \mathbf{b} = \mathbf{0}$
6. 基本ベクトルに対して

$$
\begin{array}{ccc}
\mathbf{e}_x \times \mathbf{e}_y = \mathbf{e}_z, & \mathbf{e}_y \times \mathbf{e}_z = \mathbf{e}_x, & \mathbf{e}_z \cdot \mathbf{e}_x = \mathbf{e}_y \\
\mathbf{e}_x \times \mathbf{e}_x = \mathbf{0}, & \mathbf{e}_y \times \mathbf{e}_y = \mathbf{0}, & \mathbf{e}_z \times \mathbf{e}_z = \mathbf{0}
\end{array}
$$

問題：ベクトル $\mathbf{a} = (a_x, a_y, 0)$ と $\mathbf{b} = (0, b_y, b_z)$ の外積を計算せよ．

ベクトル値関数

ベクトル値関数

ベクトル $\mathbf{a}$ の成分が，変数 u の関数

$$\mathbf{a} = (a_x(u), a_y(u), a_z(u))$$

であるとき、$\mathbf{a}$ を $\mathbf{a}(u)$ と表し、u の**ベクトル値関数**という．変数に依存しないベクトルは**定ベクトル**という．

ベクトルの極限

ベクトルの極限

ベクトル値関数 $\mathbf{a}(u) = (a_x(u), a_y(u), a_z(u))$ に対して，定ベクトル $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_x, \alpha_y, \alpha_z)$ が存在し

$$\lim_{u \to u_0} a_x(u) \to \alpha_x, \quad \lim_{u \to u_0} a_y(u) \to \alpha_y, \quad \lim_{u \to u_0} a_z(u) \to \alpha_z$$

であれば $\boldsymbol{\alpha}$ を $u \to u_0$ のときの**極限ベクトル**といい

$$\lim_{u \to u_0} \mathbf{a}(u) = \boldsymbol{\alpha}$$

と表す.

ベクトルの連続，導関数

ベクトルの極限

$\lim_{u \to u_0} \mathbf{a}(u) = \mathbf{a}(u_0)$ のとき，$\mathbf{a}(u)$ は u_0 で**連続**であるといい，成分の導関数 $\frac{da_x(u)}{du}, \frac{da_y(u)}{du}, \frac{da_z(u)}{du}$ が存在するとき，ベクトル値関数

$$\frac{d\mathbf{a}(u)}{du} = \left(\frac{da_x(u)}{du}, \frac{da_y(u)}{du}, \frac{da_z(u)}{du} \right)$$

を $\mathbf{a}(u)$ の**導関数**という．

1

$$\frac{d\mathbf{c}}{du} = \mathbf{0}$$

2

$$\frac{d\left[\mathbf{a}(u) + \mathbf{b}(u)\right]}{du} = \frac{d\mathbf{a}(u)}{du} + \frac{d\mathbf{b}(u)}{du}$$

3

$$\frac{d[\alpha\mathbf{a}(u)]}{du} = \alpha\frac{d\mathbf{a}(u)}{du}$$

4

$$\frac{d[\mathbf{c}\cdot\mathbf{a}(u)]}{du} = \mathbf{c}\cdot\frac{d\mathbf{a}(u)}{du}$$

5

$$\frac{d[\mathbf{a}(u)\cdot\mathbf{b}(u)]}{du} = \frac{d\mathbf{a}(u)}{du}\cdot\mathbf{b}(u) + \mathbf{a}(u)\cdot\frac{d\mathbf{b}(u)}{du}$$

6

$$\frac{d[\mathbf{a}(u)\times\mathbf{b}(u)]}{du} = \frac{d\mathbf{a}(u)}{du}\times\mathbf{b}(u) + \mathbf{a}(u)\times\frac{d\mathbf{b}(u)}{du}$$

問題：性質 6 を証明せよ.