応用数学 B

韓　承鎬

2018 年 10 月 15 日

目次

記号

α	定数
a	スカラー，点
$\boldsymbol{a}$	ベクトル
C	線
$\mathbb{S}$	面
$\boldsymbol{S}$	有向平面
$\mathcal{V}$	体積
f_x	ベクトル $\boldsymbol{f}$ の x 成分
$f(x)$	x を変数とするスカラー値関数
$\boldsymbol{f}(x)$	x を変数とするベクトル値関数
$f_x(x)$	x を変数とするベクトル値関数 $\boldsymbol{f}(x)$ の x 成分

第 1 章

ベクトル

1.1 ベクトル

スカラー，ベクトル

定義 1. 大きさのみを持つ量を**スカラー**といい，大きさと向きを持つ量を**ベクトル**という．

表現 矢印を用いて，矢印の長さで大きさ，方向で向きを表す．

大きさ ベクトル $\boldsymbol{a}$ の大きさは絶対値記号を用いて $|\boldsymbol{a}|$ で表す．

零ベクトル 大きさが 0 のベクトルを零ベクトルといい，$\mathbf{0}$ で表す．

相等 ベクトル $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ の大きさが等しく，向きが平行または同一直線上にあるとき，$\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ は等しいという．数式で表すと

$$\boldsymbol{a} = \boldsymbol{b} \Leftrightarrow (|\boldsymbol{a}| = |\boldsymbol{b}|) \wedge (\boldsymbol{a} \parallel \boldsymbol{b})$$

となるが，ここで "$\wedge$"記号は "かつ"の "and"ロジックを表す．

1.1.1 ベクトルの成分

基本ベクトル

定義 2. x,y,z 軸の正の方向を向いた大きさが 1 のベクトル

$$\boldsymbol{e}_x = (1,0,0),\ \boldsymbol{e}_y = (0,1,0),\ \boldsymbol{e}_z = (0,0,1)$$

はそれぞれ x，y，z 軸上の**単位ベクトル**となり，これらを座標空間の**基本ベクトル**という．

ベクトルの成分

定義 3. 座標空間において, 原点を始点とするベクトル $\boldsymbol{a}$ の終点を a としたとき, $\boldsymbol{a}$ を点 a の**位置ベクトル**という．点 a の座標が (a_x, a_y, a_z) であるとき，(a_x, a_y, a_z) を $\boldsymbol{a}$ の成分といい，$\boldsymbol{a} = (a_x, a_y, a_z)$ と表す．ここで，a_x，a_y，a_z は順に $\boldsymbol{a}$ の x 成分，y 成分，z 成分という．

$\boldsymbol{a} = (a_x, a_y, a_z)$ のとき，基本ベクトルを用いて

$$\boldsymbol{a} = a_x\boldsymbol{e}_x + a_y\boldsymbol{e}_y + a_z\boldsymbol{e}_z$$

で表せる．

1.1.2　ベクトルの和とスカラー積

ベクトルの和

定義 4. 2 つのベクトル $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ が与えられたとき，$\boldsymbol{a}$ の終点に $\boldsymbol{b}$ の始点を合わせ，$\boldsymbol{a}$ の始点から $\boldsymbol{b}$ の終点に至るベクトルを $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ と定義する．

【性質】

1. 交換則：$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b} = \boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}$
2. 結合則：$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\boldsymbol{c} = \boldsymbol{a}+(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})$

ベクトルのスカラー積

定義 5. ベクトル $\boldsymbol{a}$ と実数 α に対して，ベクトルのスカラー倍 $\alpha\boldsymbol{a}$ を次のように定義する．

- $\alpha > 0$ のときは，$\boldsymbol{a}$ と同一直線上同じ向きで，大きさ α 倍のベクトル
- $\alpha = 0$ のときは，零ベクトル $\boldsymbol{0}$
- $\alpha < 0$ のときは，$\boldsymbol{a}$ と同一直線上反対の向きで，大きさ $|\alpha|$ 倍のベクトル

【性質】

1. $|\alpha\boldsymbol{a}| = |\alpha||\boldsymbol{a}|$
2. $\alpha(\beta\boldsymbol{a}) = (\alpha\beta)\boldsymbol{a}$
3. $\alpha(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}) = \alpha\boldsymbol{a}+\alpha\boldsymbol{b}$
4. $(\alpha+\beta)\boldsymbol{a} = \alpha\boldsymbol{a}+\beta\boldsymbol{a}$

和（差），スカラー倍を成分で表すと

1. $(a_x, a_y, a_z) \pm (b_x, b_y, b_z) = (a_x \pm b_x, a_y \pm b_y, a_z \pm b_z)$
2. $\alpha(a_z, a_y, a_z) = (\alpha a_x, \alpha a_y, \alpha a_z)$

が成り立つ．

1.1.3　ベクトルの内積

内積

定義 6. $\mathbf{0}$ でない二つのベクトル $\boldsymbol{a}$,$\boldsymbol{b}$ に対して，内積（スカラー積）を

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} = |\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\theta$$

と定める．ここで，θ は $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ の始点を一致させたときに二つのベクトルがなす角度である．零ベクトルに対しては，$\mathbf{0}\cdot\mathbf{0} = \mathbf{0}\cdot\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}\cdot\mathbf{0} = 0$ と定める．

【性質】

1. $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} = \boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a}$
2. $(\alpha\boldsymbol{a})\cdot\boldsymbol{b} = \boldsymbol{a}\cdot(\alpha\boldsymbol{b}) = \alpha(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})$
3. $\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}) = \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}$
4. 基本ベクトルに対して

$$\boldsymbol{e}_x\cdot\boldsymbol{e}_x = \boldsymbol{e}_y\cdot\boldsymbol{e}_y = \boldsymbol{e}_z\cdot\boldsymbol{e}_z = 1, \quad \boldsymbol{e}_x\cdot\boldsymbol{e}_y = \boldsymbol{e}_y\cdot\boldsymbol{e}_z = \boldsymbol{e}_z\cdot\boldsymbol{e}_x = 0$$

   が成り立つ．
5. 座標空間では $\boldsymbol{a} = (a_x, a_y, a_z)$,$\boldsymbol{b} = (b_x, b_y, b_z)$ のとき

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} = a_xb_x + a_yb_y + a_zb_z, \quad |\boldsymbol{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$$

   である．

1.1.4　ベクトルの外積

面積ベクトル

定義 7. 空間内の表と裏が指定された**有向平面** $\boldsymbol{S}$ に対し，$\boldsymbol{S}$ に垂直で裏から表方向を向いた単位ベクトル $\boldsymbol{n}$ を $\boldsymbol{S}$ の**単位法線ベクトル**という．$\boldsymbol{S}$ の平面上の閉曲線 C によって囲まれた領域 $\mathbb{C}$ の面積を α とする．そのとき，ベクトル $\boldsymbol{c} = \alpha\boldsymbol{n}$ を領域 $\mathbb{C}$ の**面積ベクトル**という．

点 p が閉曲線 C 上を $\mathbb{C}$ の内部を左手に見る向きにまわるとき，右ネジの進む方向が $\boldsymbol{S}$ の単位法線ベクトルと一致するならば，閉曲線を**正の向きに回る**という．

外積

定義 8. 2 つのベクトル $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ を両辺とする平行四辺形 $\mathbb{S}$ に対し，この平面で垂直かつ $\boldsymbol{a}$ から $\boldsymbol{b}$ へ最短で右ねじを回すときねじが進む方向を表とすると，$\mathbb{S}$ の面積ベクトルを $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ の**外積**と呼び $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ で表す．なお

$$\mathbf{0}\times\mathbf{0} = \mathbf{0}, \quad \mathbf{0}\times\boldsymbol{a} = \mathbf{0}$$

と定める．

$\boldsymbol{a} = (a_x, a_y, a_z)$, $\boldsymbol{b} = (b_x, b_y, b_z)$ のとき，外積を成分で表せば

$$\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = \left(\begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_z & a_x \\ b_z & b_x \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix} \right) = \begin{vmatrix} \boldsymbol{e}_x & \boldsymbol{e}_y & \boldsymbol{e}_z \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}$$

となる．

外積については，次の法則が成り立つ．

1. $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = -\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{a}$
2. $|\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}| = |\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}| \sin\theta$
3. $\alpha\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = \boldsymbol{a} \times \alpha\boldsymbol{b} = \alpha(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b})$
4. $\boldsymbol{a} \times (\boldsymbol{b} + \boldsymbol{c}) = \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} + \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{c}$, $(\boldsymbol{b} + \boldsymbol{c}) \times \boldsymbol{a} = \boldsymbol{b} \times \boldsymbol{a} + \boldsymbol{c} \times \boldsymbol{a}$
5. $\boldsymbol{a} \parallel \boldsymbol{b} \Leftrightarrow \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = \boldsymbol{0}$
6. 基本ベクトルに対して

$$\begin{aligned} \boldsymbol{e}_x \times \boldsymbol{e}_y = \boldsymbol{e}_z, \quad \boldsymbol{e}_y \times \boldsymbol{e}_z = \boldsymbol{e}_x, \quad \boldsymbol{e}_z \cdot \boldsymbol{e}_x = \boldsymbol{e}_y \\ \boldsymbol{e}_x \times \boldsymbol{e}_x = \boldsymbol{0}, \quad \boldsymbol{e}_y \times \boldsymbol{e}_y = \boldsymbol{0}, \quad \boldsymbol{e}_z \times \boldsymbol{e}_z = \boldsymbol{0} \end{aligned}$$

1.2　空間における微分

ベクトル値関数, 定ベクトル

定義 9. ベクトル $\boldsymbol{a}$ の成分が，変数 u の関数

$$\boldsymbol{a} = (a_x(u), a_y(u), a_z(u))$$

であるとき、$\boldsymbol{a}$ を $\boldsymbol{a}(u)$ と表し、u の**ベクトル値関数**という．変数に依存しないベクトルは**定ベクトル**という．

極限ベクトル, 連続

定義 10. ベクトル値関数 $\boldsymbol{a}(u) = (a_x(u), a_y(u), a_z(u))$ に対して，定ベクトル $\boldsymbol{\alpha}$ が存在し

$$\lim_{u \to u_0} a_x(u) \to \alpha_x, \quad \lim_{u \to u_0} a_y(u) \to \alpha_y, \quad \lim_{u \to u_0} a_z(u) \to \alpha_z$$

であれば $\boldsymbol{\alpha}$ を $u \to u_0$ のときの**極限ベクトル**といい

$$\lim_{u \to u_0} \boldsymbol{a}(u) = \boldsymbol{\alpha}$$

と表す．また，$\lim_{u \to u_0} \boldsymbol{a}(u) = \boldsymbol{a}(u_0)$ のとき，$\boldsymbol{a}(u)$ は u_0 で**連続**であるといい，成分の導関数 $\frac{da_x(u)}{du}, \frac{da_y(u)}{du}, \frac{da_z(u)}{du}$ が存在するとき，ベクトル値関数

$$\frac{d\boldsymbol{a}(u)}{du} = \left(\frac{da_x(u)}{du}, \frac{da_y(u)}{du}, \frac{da_z(u)}{du} \right)$$

を $\boldsymbol{a}(u)$ の**導関数**という．

【性質】

1. $\dfrac{d\boldsymbol{c}}{du} = \boldsymbol{0}$
2. $\dfrac{d\left[\boldsymbol{a}(u) + \boldsymbol{b}(u)\right]}{du} = \dfrac{d\boldsymbol{a}(u)}{du} + \dfrac{d\boldsymbol{b}(u)}{du}$
3. $\dfrac{d[\alpha\boldsymbol{a}(u)]}{du} = \alpha\dfrac{d\boldsymbol{a}(u)}{du}$
4. $\dfrac{d[\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{a}(u)]}{du} = \boldsymbol{c}\cdot\dfrac{d\boldsymbol{a}(u)}{du}$
5. $\dfrac{d[\boldsymbol{a}(u)\cdot\boldsymbol{b}(u)]}{du} = \dfrac{d\boldsymbol{a}(u)}{du}\cdot\boldsymbol{b}(u) + \boldsymbol{a}(u)\cdot\dfrac{d\boldsymbol{b}(u)}{du}$
6. $\dfrac{d[\boldsymbol{a}(u)\times\boldsymbol{b}(u)]}{du} = \dfrac{d\boldsymbol{a}(u)}{du}\times\boldsymbol{b}(u) + \boldsymbol{a}(u)\times\dfrac{d\boldsymbol{b}(u)}{du}$

演習問題

1. ベクトル $\boldsymbol{a} = (-1, 0, 7)$ と $\boldsymbol{b} = (-4, 5, 3)$ がなす角 θ を求めよ.
2. ベクトル $\boldsymbol{a} = (a_x, a_y, 0)$ と $\boldsymbol{b} = (0, b_y, b_z)$ の外積を計算せよ.
3. $\dfrac{d[\boldsymbol{a}(u)\times\boldsymbol{b}(u)]}{du} = \dfrac{d\boldsymbol{a}(u)}{du}\times\boldsymbol{b}(u) + \boldsymbol{a}(u)\times\dfrac{d\boldsymbol{b}(u)}{du}$ を証明せよ.

第 2 章

スカラー場とベクトル場

スカラー場，ベクトル場

定義 11. 平面または空間の領域 $\mathcal{V}$ において，$\mathcal{V}$ 内の各点 p にスカラー値 $f(p)$ が対応付けられているとき，$\mathcal{V}$ を**スカラー場**といい，ベクトル値 $\boldsymbol{f}(p)$ が対応付けられているとき，$\mathcal{V}$ を**ベクトル場**という．

- スカラー場の例：気温，気圧，温度，人口密度
- ベクトル場の例：海流，電場，磁場

2.1 勾配ベクトル

勾配ベクトル

定義 12. スカラー場 $f(x,y,z)$ に対して，偏導関数を成分にもつベクトル

$$\nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}\right)$$

をスカラー場 $f(x,y,z)$ の**勾配ベクトル**という．ここで，偏導関数をつくる作用 $\nabla = \left(\dfrac{\partial}{\partial x}, \dfrac{\partial}{\partial y}, \dfrac{\partial}{\partial z}\right)$ は，**ナブラ**と呼び，**ハミルトンの演算子**という．

勾配ベクトルは**グラディエント**とも呼ばれ，スカラー場 f の勾配ベクトルは grad f とも表す．

例 1. スカラー場

$$f(x,y,z) = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$$

の勾配を計算せよ．

【回答】

$$\frac{\partial f}{\partial x} = -\frac{1}{2}(x^2+y^2+z^2)^{-\frac{3}{2}}2x = -(x^2+y^2+z^2)^{-\frac{3}{2}}x$$

同様に

$$\frac{\partial f}{\partial y} = -(x^2+y^2+z^2)^{-\frac{3}{2}}y$$
$$\frac{\partial f}{\partial z} = -(x^2+y^2+z^2)^{-\frac{3}{2}}z$$

より

$$\nabla f = -(x^2+y^2+z^2)^{-\frac{3}{2}}(x,y,z)$$

である．また，$\boldsymbol{r}=(x,y,z)=x\boldsymbol{e}_x+y\boldsymbol{e}_y+z\boldsymbol{e}_z$，$|\boldsymbol{r}|=\sqrt{x^2+y^2+z^2}=r$ とおくと，$\nabla f = -\dfrac{\boldsymbol{r}}{r^3}$ と書ける．

【性質】

スカラー場 $f(x,y,z)$ および $g(x,y,z)$ に対して，演算子 ∇ は次の計算規則が成り立つ．

1. $\nabla(\alpha f+\beta g)=\alpha\nabla f+\beta\nabla g$　$\alpha,\ \beta$ は定数
2. $\nabla(fg)=(\nabla f)g+f(\nabla g)$
3. $\nabla\left(\dfrac{f}{g}\right)=\dfrac{(\nabla f)g-f(\nabla g)}{g^2}$
4. $\nabla(h(f))=\dfrac{d[h(f)]}{df}\nabla f$　h は f のスカラー値関数

2.1.1　勾配の意味

方向微分係数

定義 13. スカラー場 $f(x,y,z)$ において，点 (x_0,y_0,z_0) を通る単位ベクトル $\boldsymbol{u}=(u_x,u_y,u_z)$ を定め，その方向での傾斜

$$c(x_0,y_0,z_0)=\lim_{\Delta\to 0}\frac{f(x_0+\Delta u_x,y_0+\Delta u_y,z_0+\Delta u_z)-f(x_0,y_0,z_0)}{\Delta}$$

をスカラー場 $f(x,y,z)$ の点 (x_0,y_0,z_0) における $\boldsymbol{u}$ 方向への**方向微分係数**という．

スカラー場 $f(x,y,z)$ にある同位面 $f(x,y,z)=\alpha$ 上の点において，同位面上のベクトル $\boldsymbol{u}$ を定め，方向微分係数を求めると，右辺は定数であるので

$$\frac{df}{du}=\frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{du}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{du}+\frac{\partial f}{\partial z}\frac{dz}{du}=0 \Leftrightarrow \nabla f\cdot\left(\frac{dx}{du},\frac{dy}{du},\frac{dz}{du}\right)=0$$

となる．ここで $\left(\dfrac{dx}{du},\dfrac{dy}{du},\dfrac{dz}{du}\right)$ は微分点における接線の方向ベクトルであるから

$$\nabla f\cdot\boldsymbol{u}=0$$

となり，$\nabla f \perp \boldsymbol{u}$ である．

∇f は接線に垂直な法線ベクトルとなり，スカラー場 $f(x,y,z)$ がもっとも増加する向きである．単位法線ベクトルを $\boldsymbol{n}$ とすると

$$\boldsymbol{n} = \pm\frac{\nabla f}{|\nabla f|}$$

で与えられる．

2.2　ベクトル場の発散

発散

定義 14. ベクトル場 $\boldsymbol{f}(x,y,z) = (f_x(x,y,z), f_y(x,y,z), f_z(x,y,z))$ に対して，スカラー値関数

$$\nabla\cdot\boldsymbol{f} = \frac{\partial f_x}{\partial x} + \frac{\partial f_y}{\partial y} + \frac{\partial f_z}{\partial z}$$

をベクトル場 $\boldsymbol{f}(x,y,z)$ の**発散**という．

ベクトル場 $\boldsymbol{f}(x,y,z)$ の発散はダイバージェンスといい，div $\boldsymbol{f}$ で表すこともある．平面ベクトル場 $\boldsymbol{f}(x,y) = (f_x(x,y), f_y(x,y))$ においては

$$\nabla\cdot\boldsymbol{f} = \frac{\partial f_x}{\partial x} + \frac{\partial f_y}{\partial y}$$

である．

例 2. ベクトル場 $\boldsymbol{f}(x,y,z) = \dfrac{xyz}{6}(x,y,z)$ の発散を計算せよ．

【回答】

発散の定義より

$$\begin{aligned}\nabla\cdot\boldsymbol{f} &= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x^2yz}{6}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{xy^2z}{6}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{xyz^2}{6}\right)\\ &= \frac{xyz}{3} + \frac{xyz}{3} + \frac{xyz}{3}\\ &= xyz\end{aligned}$$

勾配がスカラー場からベクトル場への演算であるに対し，発散はベクトル場からスカラー場への演算である．その故にスカラー場 $f(x,y,z) = \dfrac{xyz}{6}(x+y+z)$ が与えられたとき，$f(x,y,z)$ の勾配は

$$\begin{aligned}\nabla f &= \left(\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x^2yz}{6}\right), \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{xy^2z}{6}\right), \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{xyz^2}{6}\right)\right)\\ &= \left(\frac{xyz}{3}, \frac{xyz}{3}, \frac{xyz}{3}\right)\end{aligned}$$

となる．

【性質】

1. $\nabla\cdot(\alpha\boldsymbol{f}+\beta\boldsymbol{g})=\alpha\nabla\cdot\boldsymbol{f}+\beta\nabla\cdot\boldsymbol{g}$ (α,β は定数)
2. スカラー値関数 $g(x,y,z)$ に対して

$$\nabla\cdot(g\boldsymbol{f})=\nabla g\cdot\boldsymbol{f}+g\nabla\cdot\boldsymbol{f}$$

2.2.1　発散の意味

平面のベクトル場 $\boldsymbol{f}(x,y,z)$ で示される熱の流れのベクトル場があるとする．1 辺の長さが Δx, Δy の長方形をつくると，Δy の辺から入る熱量は $f_x\Delta y$ であり，Δx の辺から出る熱量は $f_y\Delta x$ である．よって y 軸方向の熱量の出入りは

$$[f_x(x+\Delta x,y)-f_x(x,y)]\,\Delta y\approx\frac{\partial f_x}{\partial x}\Delta x\Delta y$$

である．同様に y 軸方向には $\dfrac{\partial f_y}{\partial y}\Delta x\Delta y$ だけ出入りがあるので，単位面積当たりの熱量の出入りが $\nabla\cdot\boldsymbol{f}$ となる．

2.2.2　ラプラシアン

ラプラシアン

定義 15. 演算子

$$\nabla^2=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

を**ラプラシアン**もしくは**ラプラス演算子**と呼ぶ.

スカラー場 $f(x,y,z)$ が与えられたとき，$f(x,y,z)$ の勾配の発散を求めると

$$\begin{aligned}\nabla\cdot(\nabla f)&=\nabla\cdot\left(\frac{\partial f}{\partial x},\frac{\partial f}{\partial y},\frac{\partial f}{\partial z}\right)\\&=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}\\&=\left(\frac{\partial f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)f\\&=\nabla^2 f\end{aligned}$$

で表す.

2.3 ベクトル場の回転

回転

定義 16. ベクトル場 $\boldsymbol{f}(x,y,z) = (f_x(x,y,z), f_y(x,y,z), f_z(x,y,z))$ に対して

$$\nabla \times \boldsymbol{f} := \left(\frac{\partial f_z}{\partial y} - \frac{\partial f_y}{\partial z}, \frac{\partial f_x}{\partial z} - \frac{\partial f_z}{\partial x}, \frac{\partial f_y}{\partial x} - \frac{\partial f_x}{\partial y}\right)$$

これをベクトル場 $\boldsymbol{f}(x,y,z)$ の**回転**という.

回転はローティションもしくはカールと呼ぶこともあり，それぞれ rot $\boldsymbol{f}$ もしくは curl $\boldsymbol{f}$ で表す.

空間の基本ベクトルを $\boldsymbol{e}_x$,$\boldsymbol{e}_y$,$\boldsymbol{e}_z$ とすると回転は

$$\nabla \times \boldsymbol{f} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{e}_x & \boldsymbol{e}_y & \boldsymbol{e}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ f_x & f_y & f_z \end{vmatrix}$$

で表せる.

例 3. ベクトル場 $\boldsymbol{f}(x,y,z) = \dfrac{xyz}{6}(x,y,z)$ の回転を計算せよ.

【回答】

定義より

$$\begin{aligned} &\nabla \times \boldsymbol{f} \\ &= \begin{vmatrix} \boldsymbol{e}_x & \boldsymbol{e}_y & \boldsymbol{e}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{x^2yz}{6} & \frac{xy^2z}{6} & \frac{xyz^2}{6} \end{vmatrix} \\ &= \left(\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{xyz^2}{6}\right) - \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{xy^2z}{6}\right), \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{x^2yz}{6}\right) - \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{xyz^2}{6}\right), \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{xy^2z}{6}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{x^2yz}{6}\right)\right) \\ &= \left(\frac{x(z^2-y^2)}{6}, \frac{y(x^2-z^2)}{6}, \frac{z(y^2-x^2)}{6}\right) \end{aligned}$$

【性質】

回転について次の性質が成り立つ.

1. $\nabla \times (\alpha \boldsymbol{f} + \beta \boldsymbol{g}) = \alpha \nabla \times \boldsymbol{f} + \beta \nabla \times \boldsymbol{g}$
2. スカラー場 $f(x,y,z)$ とベクトル場 $\boldsymbol{g}(x,y,z)$ に対し

$$\nabla \times (f\boldsymbol{g}) = \nabla f \times \boldsymbol{g} + f(\nabla \times \boldsymbol{g})$$

2.3.1　回転の意味

回転はベクトル場での渦巻きの流速ベクトルを表す．図 2.1 で示したように，空間のベクトル場

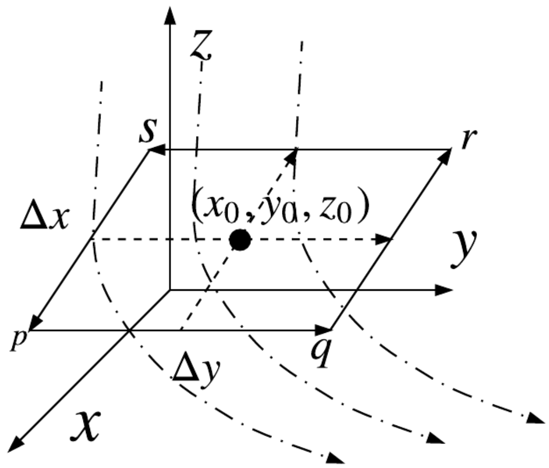

図 2.1　長方形渦の大きさ

$\boldsymbol{f}(x, y, z)$ で法線ベクトルが z 軸の正の方向と一致する有向平面において，中心の座標が (x_0, y_0, z_0) で，x 軸と y 軸で長さがそれぞれ Δx と Δy となる長方形 C があるとすると，この長方形 C での渦の大きさは

$$
\begin{aligned}
&f_y(x_0+\Delta x/2, y_0, z_0)\Delta y - f_x(x_0, y_0+\Delta y/2, z_0)\Delta x \\
&-f_y(x_0-\Delta x/2, y_0, z_0)\Delta y + f_x(x_0, y_0-\Delta y/2, z_0)\Delta x \\
=& \left(f_y(x_0+\Delta x/2, y_0, z_0) - f_y(x_0-\Delta x/2, y_0, z_0)\right)\Delta y \\
&-\left(f_x(x_0, y_0+\Delta y/2, z_0) - f_x(x_0, y_0-\Delta y/2, z_0)\right)\Delta x \\
=& \left(\frac{f_y(x_0+\Delta x/2, y_0, z_0) - f_y(x_0-\Delta x/2, y_0, z_0)}{\Delta x}\right)\Delta x\Delta y \\
&-\left(\frac{f_x(x_0, y_0+\Delta y/2, z_0) - f_x(x_0, y_0-\Delta y/2, z_0)}{\Delta y}\right)\Delta x\Delta y \\
\approx& \left(\frac{\partial f_y}{\partial x} - \frac{\partial f_x}{\partial y}\right)\Delta x\Delta y \\
=& (\nabla\times\boldsymbol{f})_z\,\Delta x\Delta y
\end{aligned}
$$

なお，符号が負になる項は $f_x > 0$, $f_y > 0$ となる位置で，C 上の渦の方向と f_x もしくは f_y の方向が反対であるためである．

2.4　演算子間の関係

勾配, 発散, 回転とベクトルの内積，外積の間には次の等式が成り立つ．

1. $\nabla\times(f\boldsymbol{g}) = f(\nabla\times\boldsymbol{g}) + (\nabla f)\times\boldsymbol{g}$
2. $\nabla\times(\nabla\times\boldsymbol{f}) = \nabla(\nabla\cdot\boldsymbol{f}) - \nabla^2\boldsymbol{f}$

3. $\nabla \cdot (f\boldsymbol{g}) = f\nabla \cdot \boldsymbol{g} + (\nabla f) \cdot \boldsymbol{g}$
4. $\nabla(\boldsymbol{f} \cdot \boldsymbol{g}) = (\boldsymbol{f} \cdot \nabla)\boldsymbol{g} + (\boldsymbol{g} \cdot \nabla)\boldsymbol{f} + \boldsymbol{g} \times (\nabla \times \boldsymbol{f}) + \boldsymbol{f} \times (\nabla \times \boldsymbol{g})$
5. $\nabla \cdot (\boldsymbol{f} \times \boldsymbol{g}) = (\nabla \times \boldsymbol{f}) \cdot \boldsymbol{g} - \boldsymbol{f} \cdot (\nabla \times \boldsymbol{g})$
6. $\nabla \times (\boldsymbol{f} \times \boldsymbol{g}) = (\nabla \cdot \boldsymbol{g})\boldsymbol{f} - (\nabla \cdot \boldsymbol{f})\boldsymbol{g} + (\boldsymbol{g} \cdot \nabla)\boldsymbol{f} - (\boldsymbol{f} \cdot \nabla)\boldsymbol{g}$

演習問題

1. ベクトル場 $\boldsymbol{r}(x, y, z) = (x, y, z)$ に対して，$r = |\boldsymbol{r}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \neq 0$ とおき，次の値を r，$\boldsymbol{r}$，$f(r)$，$\frac{d[f(r)]}{dr}$ および $\frac{d^2[f(r)]}{dr^2}$ を用いて表わせよ．
   (a) $\nabla f(r)$
   (b) $\nabla \cdot [f(r)\boldsymbol{r}]$
   (c) $\nabla^2 f(r)$
2. スカラー場 $f(x, y, z) = 2xy^2 - x^3z^2$ に対して，$\nabla \times (\nabla f)$ を求めよ．
3. スカラー場 $f(x, y, z)$ と $g(x, y, z)$ に対して，$\nabla \cdot (\nabla f \times \nabla g) = 0$ を証明せよ．

第 3 章

空間上の積分

3.1　線積分

空間曲線

定義 17. 空間上の点 c の位置ベクトルが変数 u の関数として

$$\boldsymbol{c}(u) = (c_x(u), c_y(u), c_z(u)) \tag{3.1}$$

であるとき，変数 u の変化区間 $a \leq u \leq b$ での c の軌跡は

$$C : (\boldsymbol{c}(u))_{u=a}^{b} = (c_x(u), c_y(u), c_z(u))_{u=a}^{b}$$

空間曲線となり，式 (3.1) を**空間曲線の方程式**という．

接ベクトル　空間曲線 C の**接ベクトル**は

$$\lim_{\Delta u \to 0} \frac{\Delta C}{\Delta u} = \lim_{\Delta u \to 0} \frac{\boldsymbol{c}(u+\Delta u) - \boldsymbol{c}(u)}{\Delta u} = \frac{d\boldsymbol{c}(u)}{du} = \left(\frac{dc_x(u)}{du}, \frac{dc_y(u)}{du}, \frac{dc_z(u)}{du} \right) \tag{3.2}$$

で与えられる．

弧長　空間曲線 C の微小な接ベクトル $d\boldsymbol{c}$ の長さ dC は

$$dC = |d\boldsymbol{c}| = \left| \frac{d\boldsymbol{c}}{du} du \right| = \left| \frac{d\boldsymbol{c}}{du} \right| du \tag{3.3}$$

となるので，$a \leq u \leq b$ で変化するときの弧長は

$$\int_C dC = \int_C |d\boldsymbol{c}| = \int_a^b \left| \frac{d\boldsymbol{c}}{du} \right| du$$

で与えられる．

線積分

定義 18. 空間のスカラー場 $f(x,y,z)$ において，空間曲線 $C : (\boldsymbol{c}(u))_{u=a}^{b}$ が与えられたとき

$$\begin{aligned}&\int_C f(c_x,c_y,c_z)dC\\ &=\int_C f(\boldsymbol{c})|d\boldsymbol{c}| = \int_a^b f(\boldsymbol{c})\left|\frac{d\boldsymbol{c}}{du}\right|du\\ &=\int_a^b f(c_x,c_y,c_z)\sqrt{\left(\frac{dc_x}{du}\right)^2+\left(\frac{c_y}{du}\right)^2+\left(\frac{c_z}{du}\right)^2}du\end{aligned}$$

を曲線 C に沿っての f の線積分とよぶ.

例 4. $f(x,y,z)=x^2yz$, $C : \left(u, \frac{u^2}{2}, \frac{u^3}{6}\right)_{u=0}^{1}$ とすると

$$\sqrt{\left(\frac{dc_x}{du}\right)^2+\left(\frac{c_y}{du}\right)^2+\left(\frac{c_z}{du}\right)^2}=\sqrt{1^2+u^2+\left(\frac{u^2}{2}\right)^2}=\frac{u^2+2}{2}$$

より

$$\int_C fdC = \int_0^1 \frac{u^7}{12}\cdot\frac{u^2+2}{2}du=\frac{7}{480}$$

である.

3.1.1 ベクトル場の接線線積分

接線線積分

定義 19. ベクトル場 $\boldsymbol{f}(x,y,z) = (f_x(x,y,z), f_y(x,y,z), f_z(x,y,z))$ において，空間曲線 $C : (\boldsymbol{c}(u))_{u=a}^{b}$ が与えられたとき，ベクトル $\boldsymbol{f}(x,y,z)$ と $d\boldsymbol{c}$ との内積の C に沿っての線積分

$$\int_C \boldsymbol{f}\cdot d\boldsymbol{c}$$

をベクトル場 $\boldsymbol{f}$ の曲線 C に沿っての**接線線積分**と呼ぶ．曲線 C 単位接線ベクトル

$$\boldsymbol{t}=\frac{d\boldsymbol{c}}{du}$$

を用いると，接線線積分は

$$\int_C \boldsymbol{f}\cdot d\boldsymbol{c}=\int_C \boldsymbol{f}\cdot\boldsymbol{t}dC=\int_a^b \boldsymbol{f}\cdot\boldsymbol{t}du$$

で表せる.

例 5. $C:(a\cos\theta, a\sin\theta, b\theta)_{\theta=0}^{\pi}$ のとき，ベクトル場 $\boldsymbol{f}(x,y,z)=(y,-z,x)$ の接線線積分を求めよ.

【回答】

$$\begin{cases} \dfrac{d(a\cos\theta)}{d\theta} & = & -a\sin\theta \\ \dfrac{d(a\sin\theta)}{d\theta} & = & a\cos\theta \\ \dfrac{d(b\theta)}{d\theta} & = & b \end{cases}$$

より

$$\begin{aligned} \int_C \boldsymbol{f}\cdot d\boldsymbol{c} &= \int_0^{\pi} (a\sin\theta, -b\theta, a\cos\theta)\cdot(-a\sin\theta, a\cos\theta, b)\,d\theta \\ &= \int_0^{\pi} [a\sin\theta\cdot(-a\sin\theta) - b\theta\cdot a\cos\theta + a\cos\theta\cdot b]\,d\theta \\ &= \int_0^{\pi} \left(-a^2\sin^2\theta - ab\theta\cos\theta + ab\cos\theta\right)d\theta \\ &= -\frac{\pi a^2}{2} + 2ab \end{aligned}$$

【性質】

スカラー値関数 $f(x,y,z)$ の勾配ベクトル ∇f の接線線積分は，曲線 C の始点を a，終点を b とすると

$$\begin{aligned} \int_C \nabla f\cdot d\boldsymbol{c} &= \int_C \left(\frac{\partial f}{\partial c_x}, \frac{\partial f}{\partial c_y}, \frac{\partial f}{\partial c_z}\right)\cdot d\boldsymbol{c} \\ &= \int_C \left(\frac{\partial f}{\partial c_x}dc_x + \frac{\partial f}{\partial c_y}dc_y + \frac{\partial f}{\partial c_z}dc_z\right) \\ &= \int_C df = [f(x,y,z)]_a^b \\ &= f(b_x,b_y,b_z) - f(a_x,a_y,a_z) \end{aligned}$$

となって，2 点 a, b にだけ関係し，積分路に依存しない．とくに，曲線 C が閉曲線 (始点と終点が一致する曲線) のとき，線積分を $\oint_C$ と表すことにすれば

$$\oint_C \nabla f\cdot d\boldsymbol{c} = 0$$

である.

例 6. 上の例 4 でのスカラー場 $f(x,y,z)=x^2yz$ と曲線 $C:\left(u, \frac{u^2}{2}, \frac{u^3}{6}\right)_{u=0}^{1}$ に対して，線積分を

計算すると

$$\nabla f = \left(2c_x c_y c_z, c_x^2 c_z, c_x^2 c_y\right) = \left(\frac{u^6}{6}, \frac{u^5}{6}, \frac{u^4}{2}\right)$$
$$d\boldsymbol{c} = \left(1, u, \frac{u^2}{2}\right)$$

より

$$\int_C \nabla f \cdot d\boldsymbol{c} = \int_0^1 \left(\frac{u^6}{6} + \frac{u^6}{6} + \frac{u^6}{4}\right) du = \int_0^1 \frac{7u^6}{12} = \frac{1}{12}$$

が得られる．

一方，$\int_C \nabla f \cdot d\boldsymbol{c}$ が経路に依存しない性質を利用すると，$u = 0, 1$ に対応する曲線上の点の位置ベクトル $\boldsymbol{c}(0) = (0,0,0)$ 及び $\boldsymbol{c}(1) = \left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{6}\right)$ より

$$\int_C \nabla f \cdot d\boldsymbol{c} = f\left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{6}\right) - f\left(0,0,0\right) = \frac{1}{12}$$

と計算が簡単になる．

演習問題

1. スカラー場 $f(x, y, z) = x + y + z$ において，円柱ラ線

$$C : (\alpha \cos u, \alpha \sin u, \beta u)_{u=0}^{\pi}$$

　に沿った $f(x, y, z)$ の線積分を求めよ．

2. ベクトル場 $\boldsymbol{f}(x, y, z) = (yz, zx, xy)$ において，原点 $o(0, 0, 0)$ から点 $a(1, 2, 2)$ までの直線に沿った接線線積分

$$\int_C \boldsymbol{f} \cdot d\boldsymbol{c}$$

　を計算せよ．

演習問題回答例

第一章

1.

$$\cos\theta = \frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|} = \frac{1}{2}$$

より，$\theta = \frac{\pi}{3}$ である．

2.

$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{e}_x & \boldsymbol{e}_y & \boldsymbol{e}_z \\ a_x & a_y & 0 \\ 0 & b_y & b_z \end{vmatrix} = (a_y b_z, -a_x b_z, a_x b_y)$$

3.

$$\begin{aligned}
&\frac{d[\boldsymbol{a}(u)\times\boldsymbol{b}(u)]}{du} \\
&= \frac{d\left[\begin{vmatrix} \boldsymbol{e}_x & \boldsymbol{e}_y & \boldsymbol{e}_z \\ a_x(u) & a_y(u) & a_z(u) \\ b_x(u) & b_y(u) & b_z(u) \end{vmatrix}\right]}{du} \\
&= \left(\frac{d[a_y(u)b_z(u) - a_z(u)b_y(u)]}{du}, \frac{d[a_z(u)b_x(u) - a_x(u)b_z(u)]}{du}, \frac{d[a_x(u)b_y(u) - a_y(u)b_x(u)]}{du}\right) \\
&= \left(\frac{d[a_y(u)]}{du}b_z(u) - \frac{d[a_z(u)]}{du}b_y(u), \frac{d[a_z(u)]}{du}b_x(u) - \frac{d[a_x(u)]}{du}b_z(u), \frac{d[a_x(u)]}{du}b_y(u) - \frac{d[a_y(u)]}{du}b_x(u)\right) \\
&\quad + \left(a_y(u)\frac{d[b_z(u)]}{du} - a_z(u)\frac{d[b_y(u)]}{du}, a_z(u)\frac{d[b_x(u)]}{du} - a_x(u)\frac{d[b_z(u)]}{du}, a_x(u)\frac{d[b_y(u)]}{du} - a_y(u)\frac{d[b_x(u)]}{du}\right) \\
&= \begin{vmatrix} \boldsymbol{e}_x & \boldsymbol{e}_y & \boldsymbol{e}_z \\ \frac{d[a_x(u)]}{du} & \frac{d[a_y(u)]}{du} & \frac{d[a_z(u)]}{du} \\ b_x(u) & b_y(u) & b_z(u) \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \boldsymbol{e}_x & \boldsymbol{e}_y & \boldsymbol{e}_z \\ a_x(u) & a_y(u) & a_z(u) \\ \frac{d[b_x(u)]}{du} & \frac{d[b_y(u)]}{du} & \frac{d[b_z(u)]}{du} \end{vmatrix} \\
&= \frac{d[\boldsymbol{a}(u)]}{du}\times\boldsymbol{b}(u) + \boldsymbol{a}(u)\times\frac{d[\boldsymbol{b}(u)]}{du}
\end{aligned}$$

第二章

1. (a)

$$\nabla f(r) = \left(\frac{\partial f(r)}{\partial x}, \frac{\partial f(r)}{\partial y}, \frac{\partial f(r)}{\partial z}\right)$$

ここで

$$\frac{\partial f(r)}{\partial x} = \frac{df(r)}{dr}\frac{\partial r}{\partial x}$$

であるが，$|\boldsymbol{r}| = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$ より

$$\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{2x}{2\sqrt{x^2+y^2+z^2}} = \frac{x}{r}$$

となるので

$$\frac{\partial f(r)}{\partial x} = \frac{df(r)}{dr}\frac{x}{r}$$

である．同様に

$$\frac{\partial f(r)}{\partial y} = \frac{df(r)}{dr}\frac{y\ulcorner}{r}$$
$$\frac{\partial f(r)}{\partial z} = \frac{df(r)}{dr}\frac{z}{r}$$

が得られ

$$\nabla f(r) = \frac{df(r)}{rdr}(x,y,z) = \frac{df(r)}{dr}\frac{\boldsymbol{r}}{r}$$

である．

(b)

$$\nabla \cdot [f(r)\boldsymbol{r}] = \nabla f(r) \cdot \boldsymbol{r} + f(r)[\nabla \cdot \boldsymbol{r}]$$

上の 1a での結果より，

$$\nabla f(r) \cdot \boldsymbol{r} = \frac{df(r)}{dr}\frac{\boldsymbol{r}}{r} \cdot \boldsymbol{r} = \frac{r^2 df(r)}{r} = \frac{rdf(r)}{dr}$$

である．一方

$$\nabla \cdot \boldsymbol{r} = \left(\frac{dx}{dx}, \frac{dy}{dy}, \frac{dz}{dz}\right) = 3$$

となるので

$$\nabla \cdot [f(r)\boldsymbol{r}] = \frac{rdf(r)}{dr} + 3f(r)$$

である．

(c)

$$\begin{aligned}
\nabla^2 f(r) = \nabla \cdot [\nabla f(r)] &= \nabla \cdot \frac{df(r)}{rdr}\boldsymbol{r} \\
&= \nabla \frac{df(r)}{rdr} \cdot \boldsymbol{r} + \frac{df(r)}{rdr}(\nabla \cdot \boldsymbol{r}) \\
&= \nabla \frac{df(r)}{rdr} \cdot \boldsymbol{r} + \frac{3df(r)}{rdr}
\end{aligned}$$

上の式の第一項で

$$\nabla \frac{df(r)}{rdr} = \left(\frac{\partial \frac{df(r)}{rdr}}{\partial x}, \frac{\partial \frac{df(r)}{rdr}}{\partial y}, \frac{\partial \frac{df(r)}{rdr}}{\partial z}\right)$$

であるが

$$\frac{\partial \frac{df(r)}{rdr}}{\partial x} = \left(\frac{d^2 f(r)}{rdr^2} - \frac{df(r)}{r^2 dr} \right) = \left(\frac{d^2 f(r)}{dr^2} - \frac{df(r)}{rdr} \right) \frac{x}{r^2}$$

となる．従って

$$\nabla \frac{df(r)}{rdr} = \left(\frac{d^2 f(r)}{dr^2} - \frac{df(r)}{rdr} \right) \frac{\boldsymbol{r}}{r^2}$$

となり

$$\nabla^2 f(r) = \frac{d^2 f(r)}{dr^2} + \frac{2df(r)}{rdr}$$

である．

2.

$$\boldsymbol{h} := \nabla f \times \nabla g = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z} \right) \times \left(\frac{\partial g}{\partial x}, \frac{\partial g}{\partial y}, \frac{\partial g}{\partial z} \right)$$
$$= \left(\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial g}{\partial z} - \frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial g}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial g}{\partial x} \text{¥} - \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial g}{\partial z}, \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial g}{\partial y} - \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial g}{\partial x} \right)$$

ここで

$$\nabla \cdot \boldsymbol{h} = \frac{\partial h_x}{\partial x} + \frac{\partial h_y}{\partial y} + \frac{\partial h_z}{\partial z}$$

となるが

$$\begin{aligned}
\frac{\partial h_x}{\partial x} &= \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\frac{\partial g}{\partial z} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial^2 g}{\partial x \partial z} - \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z}\frac{\partial g}{\partial y} - \frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y} \\
\frac{\partial h_y}{\partial y} &= \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z}\frac{\partial g}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\frac{\partial g}{\partial z} - \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial^2 g}{\partial y \partial z} \\
\frac{\partial h_z}{\partial z} &= \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z}\frac{\partial g}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial^2 g}{\partial y \partial z} - \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z}\frac{\partial g}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial^2 g}{\partial x \partial z}
\end{aligned}$$

従って

$$\nabla \cdot (\nabla f \times \nabla g) = 0$$

である．