応用数学 B

韓　承鎬

2019 年 1 月 21 日

目次

記号

α	定数
a	スカラー，点
$\boldsymbol{a}$	ベクトル
C	線
$\mathbb{S}$	面
$\boldsymbol{S}$	有向平面
$\mathcal{V}$	体積
f_x	ベクトル $\boldsymbol{f}$ の x 成分
$f(x)$	x を変数とするスカラー値関数
$\boldsymbol{f}(x)$	x を変数とするベクトル値関数
$f_x(x)$	x を変数とするベクトル値関数 $\boldsymbol{f}(x)$ の x 成分

第 1 章

ベクトル

1.1 ベクトル

スカラー，ベクトル

定義 1. 大きさのみを持つ量を**スカラー**といい，大きさと向きを持つ量を**ベクトル**という．

表現 矢印を用いて，矢印の長さで大きさ，方向で向きを表す．

大きさ ベクトル $\boldsymbol{a}$ の大きさは絶対値記号を用いて $|\boldsymbol{a}|$ で表す．

零ベクトル 大きさが 0 のベクトルを零ベクトルといい，$\boldsymbol{0}$ で表す．

相等 ベクトル $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ の大きさが等しく，向きが平行または同一直線上にあるとき，$\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ は等しいという．数式で表すと

$$\boldsymbol{a} = \boldsymbol{b} \Leftrightarrow (|\boldsymbol{a}| = |\boldsymbol{b}|) \wedge (\boldsymbol{a} \parallel \boldsymbol{b})$$

となるが，ここで “$\wedge$”記号は “かつ”の “and”ロジックを表す．

1.1.1 ベクトルの成分

基本ベクトル

定義 2. x,y,z 軸の正の方向を向いた大きさが 1 のベクトル

$$\boldsymbol{e}_x = (1,0,0),\ \boldsymbol{e}_y = (0,1,0),\ \boldsymbol{e}_z = (0,0,1)$$

はそれぞれ x，y，z 軸上の**単位ベクトル**となり，これらを座標空間の**基本ベクトル**という．

ベクトルの成分

定義 3. 座標空間において, 原点を始点とするベクトル $\boldsymbol{a}$ の終点を a としたとき, $\boldsymbol{a}$ を点 a の**位置ベクトル**という．点 a の座標が (a_x, a_y, a_z) であるとき，(a_x, a_y, a_z) を $\boldsymbol{a}$ の成分といい，$\boldsymbol{a} = (a_x, a_y, a_z)$ と表す．ここで，a_x，a_y，a_z は順に $\boldsymbol{a}$ の x 成分，y 成分，z 成分という．

$\boldsymbol{a} = (a_x, a_y, a_z)$ のとき，基本ベクトルを用いて

$$\boldsymbol{a} = a_x \boldsymbol{e}_x + a_y \boldsymbol{e}_y + a_z \boldsymbol{e}_z$$

で表せる．

1.1.2　ベクトルの和とスカラー積

ベクトルの和

定義 4. 2 つのベクトル $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ が与えられたとき，$\boldsymbol{a}$ の終点に $\boldsymbol{b}$ の始点を合わせ，$\boldsymbol{a}$ の始点から $\boldsymbol{b}$ の終点に至るベクトルを $\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}$ と定義する．

【性質】

1. 交換則：$\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} = \boldsymbol{b} + \boldsymbol{a}$
2. 結合則：$(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}) + \boldsymbol{c} = \boldsymbol{a} + (\boldsymbol{b} + \boldsymbol{c})$

ベクトルのスカラー積

定義 5. ベクトル $\boldsymbol{a}$ と実数 α に対して，ベクトルのスカラー倍 $\alpha\boldsymbol{a}$ を次のように定義する．

- $\alpha > 0$ のときは，$\boldsymbol{a}$ と同一直線上同じ向きで，大きさ α 倍のベクトル
- $\alpha = 0$ のときは，零ベクトル $\boldsymbol{0}$
- $\alpha < 0$ のときは，$\boldsymbol{a}$ と同一直線上反対の向きで，大きさ $|\alpha|$ 倍のベクトル

【性質】

1. $|\alpha\boldsymbol{a}| = |\alpha||\boldsymbol{a}|$
2. $\alpha(\beta\boldsymbol{a}) = (\alpha\beta)\boldsymbol{a}$
3. $\alpha(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}) = \alpha\boldsymbol{a} + \alpha\boldsymbol{b}$
4. $(\alpha + \beta)\boldsymbol{a} = \alpha\boldsymbol{a} + \beta\boldsymbol{a}$

和（差），スカラー倍を成分で表すと

1. $(a_x, a_y, a_z) \pm (b_x, b_y, b_z) = (a_x \pm b_x, a_y \pm b_y, a_z \pm b_z)$
2. $\alpha(a_z, a_y, a_z) = (\alpha a_x, \alpha a_y, \alpha a_z)$

が成り立つ．

1.1.3　ベクトルの内積

内積

定義 6. $\mathbf{0}$ でない二つのベクトル $\boldsymbol{a}$,$\boldsymbol{b}$ に対して，内積（スカラー積）を

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} = |\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\theta$$

と定める．ここで，θ は $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ の始点を一致させたときに二つのベクトルがなす角度である．零ベクトルに対しては，$\mathbf{0}\cdot\mathbf{0} = \mathbf{0}\cdot\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}\cdot\mathbf{0} = 0$ と定める．

【性質】

1. $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} = \boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a}$
2. $(\alpha\boldsymbol{a})\cdot\boldsymbol{b} = \boldsymbol{a}\cdot(\alpha\boldsymbol{b}) = \alpha(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})$
3. $\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}) = \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}$
4. 基本ベクトルに対して
$$\boldsymbol{e}_x\cdot\boldsymbol{e}_x = \boldsymbol{e}_y\cdot\boldsymbol{e}_y = \boldsymbol{e}_z\cdot\boldsymbol{e}_z = 1, \quad \boldsymbol{e}_x\cdot\boldsymbol{e}_y = \boldsymbol{e}_y\cdot\boldsymbol{e}_z = \boldsymbol{e}_z\cdot\boldsymbol{e}_x = 0$$
が成り立つ．
5. 座標空間では $\boldsymbol{a} = (a_x, a_y, a_z)$,$\boldsymbol{b} = (b_x, b_y, b_z)$ のとき
$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} = a_xb_x + a_yb_y + a_zb_z, \quad |\boldsymbol{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$$
である．

1.1.4　ベクトルの外積

面積ベクトル

定義 7. 空間内の表と裏が指定された**有向平面** $\boldsymbol{S}$ に対し，$\boldsymbol{S}$ に垂直で裏から表方向を向いた単位ベクトル $\boldsymbol{n}$ を $\boldsymbol{S}$ の**単位法線ベクトル**という．$\boldsymbol{S}$ の平面上の閉曲線 C によって囲まれた領域 $\mathbb{C}$ の面積を α とする．そのとき，ベクトル $\boldsymbol{c} = \alpha\boldsymbol{n}$ を領域 $\mathbb{C}$ の**面積ベクトル**という．

点 p が閉曲線 C 上を $\mathbb{C}$ の内部を左手に見る向きにまわるとき，右ネジの進む方向が $\boldsymbol{S}$ の単位法線ベクトルと一致するならば，閉曲線を**正の向きに回る**という．

外積

定義 8. 2 つのベクトル $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ を両辺とする平行四辺形 $\mathbb{S}$ に対し，この平面で垂直かつ $\boldsymbol{a}$ から $\boldsymbol{b}$ へ最短で右ねじを回すときねじが進む方向を表とすると，$\mathbb{S}$ の面積ベクトルを $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ の**外積**と呼び $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ で表す．なお

$$\mathbf{0}\times\mathbf{0} = \mathbf{0}, \quad \mathbf{0}\times\boldsymbol{a} = \mathbf{0}$$

と定める．

$\boldsymbol{a} = (a_x, a_y, a_z)$, $\boldsymbol{b} = (b_x, b_y, b_z)$ のとき，外積を成分で表せば

$$\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = \left(\begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_z & a_x \\ b_z & b_x \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix} \right) = \begin{vmatrix} \boldsymbol{e}_x & \boldsymbol{e}_y & \boldsymbol{e}_z \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}$$

となる．

外積については，次の法則が成り立つ．

1. $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = -\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{a}$
2. $|\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}| = |\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}| \sin\theta$
3. $\alpha\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = \boldsymbol{a} \times \alpha\boldsymbol{b} = \alpha(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b})$
4. $\boldsymbol{a} \times (\boldsymbol{b} + \boldsymbol{c}) = \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} + \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{c}$, $(\boldsymbol{b} + \boldsymbol{c}) \times \boldsymbol{a} = \boldsymbol{b} \times \boldsymbol{a} + \boldsymbol{c} \times \boldsymbol{a}$
5. $\boldsymbol{a} \parallel \boldsymbol{b} \Leftrightarrow \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = \boldsymbol{0}$
6. 基本ベクトルに対して

$$\begin{aligned} \boldsymbol{e}_x \times \boldsymbol{e}_y = \boldsymbol{e}_z, \quad \boldsymbol{e}_y \times \boldsymbol{e}_z = \boldsymbol{e}_x, \quad \boldsymbol{e}_z \cdot \boldsymbol{e}_x = \boldsymbol{e}_y \\ \boldsymbol{e}_x \times \boldsymbol{e}_x = \boldsymbol{0}, \quad \boldsymbol{e}_y \times \boldsymbol{e}_y = \boldsymbol{0}, \quad \boldsymbol{e}_z \times \boldsymbol{e}_z = \boldsymbol{0} \end{aligned}$$

1.2　空間における微分

ベクトル値関数, 定ベクトル

定義 9. ベクトル $\boldsymbol{a}$ の成分が，変数 u の関数

$$\boldsymbol{a} = (a_x(u), a_y(u), a_z(u))$$

であるとき、$\boldsymbol{a}$ を $\boldsymbol{a}(u)$ と表し、u の**ベクトル値関数**という．変数に依存しないベクトルは**定ベクトル**という．

極限ベクトル, 連続

定義 10. ベクトル値関数 $\boldsymbol{a}(u) = (a_x(u), a_y(u), a_z(u))$ に対して，定ベクトル $\boldsymbol{\alpha}$ が存在し

$$\lim_{u \to u_0} a_x(u) \to \alpha_x, \quad \lim_{u \to u_0} a_y(u) \to \alpha_y, \quad \lim_{u \to u_0} a_z(u) \to \alpha_z$$

であれば $\boldsymbol{\alpha}$ を $u \to u_0$ のときの**極限ベクトル**といい

$$\lim_{u \to u_0} \boldsymbol{a}(u) = \boldsymbol{\alpha}$$

と表す．また，$\lim_{u \to u_0} \boldsymbol{a}(u) = \boldsymbol{a}(u_0)$ のとき，$\boldsymbol{a}(u)$ は u_0 で**連続**であるといい，成分の導関数 $\frac{da_x(u)}{du}, \frac{da_y(u)}{du}, \frac{da_z(u)}{du}$ が存在するとき，ベクトル値関数

$$\frac{d\boldsymbol{a}(u)}{du} = \left(\frac{da_x(u)}{du}, \frac{da_y(u)}{du}, \frac{da_z(u)}{du} \right)$$

を $\boldsymbol{a}(u)$ の**導関数**という．

【性質】

1. $\dfrac{d\boldsymbol{c}}{du} = \boldsymbol{0}$
2. $\dfrac{d\left[\boldsymbol{a}(u) + \boldsymbol{b}(u)\right]}{du} = \dfrac{d\boldsymbol{a}(u)}{du} + \dfrac{d\boldsymbol{b}(u)}{du}$
3. $\dfrac{d[\alpha\boldsymbol{a}(u)]}{du} = \alpha\dfrac{d\boldsymbol{a}(u)}{du}$
4. $\dfrac{d[\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{a}(u)]}{du} = \boldsymbol{c}\cdot\dfrac{d\boldsymbol{a}(u)}{du}$
5. $\dfrac{d[\boldsymbol{a}(u)\cdot\boldsymbol{b}(u)]}{du} = \dfrac{d\boldsymbol{a}(u)}{du}\cdot\boldsymbol{b}(u) + \boldsymbol{a}(u)\cdot\dfrac{d\boldsymbol{b}(u)}{du}$
6. $\dfrac{d[\boldsymbol{a}(u)\times\boldsymbol{b}(u)]}{du} = \dfrac{d\boldsymbol{a}(u)}{du}\times\boldsymbol{b}(u) + \boldsymbol{a}(u)\times\dfrac{d\boldsymbol{b}(u)}{du}$

演習問題

1. ベクトル $\boldsymbol{a} = (-1, 0, 7)$ と $\boldsymbol{b} = (-4, 5, 3)$ がなす角 θ を求めよ.
2. ベクトル $\boldsymbol{a} = (a_x, a_y, 0)$ と $\boldsymbol{b} = (0, b_y, b_z)$ の外積を計算せよ.
3. $\dfrac{d[\boldsymbol{a}(u)\times\boldsymbol{b}(u)]}{du} = \dfrac{d\boldsymbol{a}(u)}{du}\times\boldsymbol{b}(u) + \boldsymbol{a}(u)\times\dfrac{d\boldsymbol{b}(u)}{du}$ を証明せよ.

第 2 章

スカラー場とベクトル場

スカラー場，ベクトル場

定義 11. 平面または空間の領域 $\mathcal{V}$ において，$\mathcal{V}$ 内の各点 p にスカラー値 $f(p)$ が対応付けられているとき，$\mathcal{V}$ を**スカラー場**といい，ベクトル値 $\boldsymbol{f}(p)$ が対応付けられているとき，$\mathcal{V}$ を**ベクトル場**という．

- スカラー場の例：気温，気圧，温度，人口密度
- ベクトル場の例：海流，電場，磁場

2.1 勾配ベクトル

勾配ベクトル

定義 12. スカラー場 $f(x,y,z)$ に対して，偏導関数を成分にもつベクトル

$$\nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}\right)$$

をスカラー場 $f(x,y,z)$ の**勾配ベクトル**という．ここで，偏導関数をつくる作用 $\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right)$ は，**ナブラ**と呼び，**ハミルトンの演算子**という．

勾配ベクトルは**グラディエント**とも呼ばれ，スカラー場 f の勾配ベクトルは $\mathrm{grad}\ f$ とも表す．

例 1. スカラー場

$$f(x,y,z) = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$$

の勾配を計算せよ．

【回答】

$$\frac{\partial f}{\partial x} = -\frac{1}{2}(x^2+y^2+z^2)^{-\frac{3}{2}} 2x = -(x^2+y^2+z^2)^{-\frac{3}{2}} x$$

同様に

$$\frac{\partial f}{\partial y} = -(x^2+y^2+z^2)^{-\frac{3}{2}} y$$
$$\frac{\partial f}{\partial z} = -(x^2+y^2+z^2)^{-\frac{3}{2}} z$$

より

$$\nabla f = -(x^2+y^2+z^2)^{-\frac{3}{2}}(x,y,z)$$

である．また，$\boldsymbol{r} = (x,y,z) = x\boldsymbol{e}_x + y\boldsymbol{e}_y + z\boldsymbol{e}_z$，$|\boldsymbol{r}| = \sqrt{x^2+y^2+z^2} = r$ とおくと，$\nabla f = -\dfrac{\boldsymbol{r}}{r^3}$ と書ける．

【性質】

スカラー場 $f(x,y,z)$ および $g(x,y,z)$ に対して，演算子 ∇ は次の計算規則が成り立つ．

1. $\nabla(\alpha f + \beta g) = \alpha\nabla f + \beta\nabla g$　α, β は定数
2. $\nabla(fg) = (\nabla f)g + f(\nabla g)$
3. $\nabla\left(\dfrac{f}{g}\right) = \dfrac{(\nabla f)g - f(\nabla g)}{g^2}$
4. $\nabla(h(f)) = \dfrac{d[h(f)]}{df}\nabla f$　h は f のスカラー値関数

2.1.1　勾配の意味

方向微分係数

定義 13. スカラー場 $f(x,y,z)$ において，点 (x_0,y_0,z_0) を通る単位ベクトル $\boldsymbol{u} = (u_x,u_y,u_z)$ を定め，その方向での傾斜

$$c(x_0,y_0,z_0) = \lim_{\Delta\to 0}\frac{f(x_0+\Delta u_x, y_0+\Delta u_y, z_0+\Delta u_z) - f(x_0,y_0,z_0)}{\Delta}$$

をスカラー場 $f(x,y,z)$ の点 (x_0,y_0,z_0) における $\boldsymbol{u}$ 方向への**方向微分係数**という．

スカラー場 $f(x,y,z)$ にある同位面 $f(x,y,z) = \alpha$ 上の点において，同位面上のベクトル $\boldsymbol{u}$ を定め，方向微分係数を求めると，右辺は定数であるので

$$\frac{df}{du} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{du} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{du} + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{dz}{du} = 0 \Leftrightarrow \nabla f\cdot\left(\frac{dx}{du},\frac{dy}{du},\frac{dz}{du}\right) = 0$$

となる．ここで $\left(\dfrac{dx}{du},\dfrac{dy}{du},\dfrac{dz}{du}\right)$ は微分点における接線の方向ベクトルであるから

$$\nabla f\cdot\boldsymbol{u} = 0$$

となり，$\nabla f \perp \boldsymbol{u}$ である．

∇f は接線に垂直な法線ベクトルとなり，スカラー場 $f(x,y,z)$ がもっとも増加する向きである．単位法線ベクトルを $\boldsymbol{n}$ とすると

$$\boldsymbol{n} = \pm\frac{\nabla f}{|\nabla f|}$$

で与えられる．

2.2 ベクトル場の発散

発散

定義 14. ベクトル場 $\boldsymbol{f}(x,y,z) = (f_x(x,y,z), f_y(x,y,z), f_z(x,y,z))$ に対して，スカラー値関数

$$\nabla \cdot \boldsymbol{f} = \frac{\partial f_x}{\partial x} + \frac{\partial f_y}{\partial y} + \frac{\partial f_z}{\partial z}$$

をベクトル場 $\boldsymbol{f}(x,y,z)$ の**発散**という．

ベクトル場 $\boldsymbol{f}(x,y,z)$ の発散はダイバージェンスといい，div $\boldsymbol{f}$ で表すこともある．平面ベクトル場 $\boldsymbol{f}(x,y) = (f_x(x,y), f_y(x,y))$ においては

$$\nabla \cdot \boldsymbol{f} = \frac{\partial f_x}{\partial x} + \frac{\partial f_y}{\partial y}$$

である．

例 2. ベクトル場 $\boldsymbol{f}(x,y,z) = \dfrac{xyz}{6}(x,y,z)$ の発散を計算せよ．

【回答】

発散の定義より

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \boldsymbol{f} &= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x^2yz}{6}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{xy^2z}{6}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{xyz^2}{6}\right) \\ &= \frac{xyz}{3} + \frac{xyz}{3} + \frac{xyz}{3} \\ &= xyz\end{aligned}$$

勾配がスカラー場からベクトル場への演算であるに対し，発散はベクトル場からスカラー場への演算である．その故にスカラー場 $f(x,y,z) = \dfrac{xyz}{6}(x+y+z)$ が与えられたとき，$f(x,y,z)$ の勾配は

$$\begin{aligned}\nabla f &= \left(\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x^2yz}{6}\right), \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{xy^2z}{6}\right), \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{xyz^2}{6}\right)\right) \\ &= \left(\frac{xyz}{3}, \frac{xyz}{3}, \frac{xyz}{3}\right)\end{aligned}$$

となる．

【性質】

1. $\nabla \cdot (\alpha \boldsymbol{f} + \beta \boldsymbol{g}) = \alpha \nabla \cdot \boldsymbol{f} + \beta \nabla \cdot \boldsymbol{g}$ (α,β は定数)
2. スカラー値関数 $g(x, y, z)$ に対して

$$\nabla \cdot (g\boldsymbol{f}) = \nabla g \cdot \boldsymbol{f} + g\nabla \cdot \boldsymbol{f}$$

2.2.1 発散の意味

平面のベクトル場 $\boldsymbol{f}(x, y, z)$ で示される熱の流れのベクトル場があるとする．1 辺の長さが Δx, Δy の長方形をつくると，Δy の辺から入る熱量は $f_x \Delta y$ であり，Δx の辺から出る熱量は $f_y \Delta x$ である．よって y 軸方向の熱量の出入りは

$$[f_x(x + \Delta x, y) - f_x(x, y)]\, \Delta y \approx \frac{\partial f_x}{\partial x} \Delta x \Delta y$$

である．同様に y 軸方向には $\dfrac{\partial f_y}{\partial y} \Delta x \Delta y$ だけ出入りがあるので，単位面積当たりの熱量の出入りが $\nabla \cdot \boldsymbol{f}$ となる．

2.2.2 ラプラシアン

ラプラシアン

定義 15. 演算子

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

を**ラプラシアン**もしくは**ラプラス演算子**と呼ぶ.

スカラー場 $f(x, y, z)$ が与えられたとき，$f(x, y, z)$ の勾配の発散を求めると

$$\begin{aligned}
\nabla \cdot (\nabla f) &= \nabla \cdot \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z} \right) \\
&= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} \\
&= \left(\frac{\partial f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) f \\
&= \nabla^2 f
\end{aligned}$$

で表す.

2.3　ベクトル場の回転

回転

定義 16. ベクトル場 $\boldsymbol{f}(x,y,z)=(f_x(x,y,z),f_y(x,y,z),f_z(x,y,z))$ に対して

$$\nabla\times\boldsymbol{f}:=\left(\frac{\partial f_z}{\partial y}-\frac{\partial f_y}{\partial z},\frac{\partial f_x}{\partial z}-\frac{\partial f_z}{\partial x},\frac{\partial f_y}{\partial x}-\frac{\partial f_x}{\partial y}\right)$$

これをベクトル場 $\boldsymbol{f}(x,y,z)$ の**回転**という.

回転はローティションもしくはカールと呼ぶこともあり，それぞれ rot $\boldsymbol{f}$ もしくは curl $\boldsymbol{f}$ で表す.

空間の基本ベクトルを $\boldsymbol{e}_x$,$\boldsymbol{e}_y$,$\boldsymbol{e}_z$ とすると回転は

$$\nabla\times\boldsymbol{f}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{e}_x & \boldsymbol{e}_y & \boldsymbol{e}_z\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ f_x & f_y & f_z\end{vmatrix}$$

で表せる.

例 3. ベクトル場 $\boldsymbol{f}(x,y,z)=\dfrac{xyz}{6}(x,y,z)$ の回転を計算せよ.

【回答】

定義より

$$\begin{aligned}&\nabla\times\boldsymbol{f}\\ &=\begin{vmatrix}\boldsymbol{e}_x & \boldsymbol{e}_y & \boldsymbol{e}_z\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ \frac{x^2yz}{6} & \frac{xy^2z}{6} & \frac{xyz^2}{6}\end{vmatrix}\\ &=\left(\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{xyz^2}{6}\right)-\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{xy^2z}{6}\right),\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{x^2yz}{6}\right)-\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{xyz^2}{6}\right),\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{xy^2z}{6}\right)-\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{x^2yz}{6}\right)\right)\\ &=\left(\frac{x(z^2-y^2)}{6},\frac{y(x^2-z^2)}{6},\frac{z(y^2-x^2)}{6}\right)\end{aligned}$$

【性質】

回転について次の性質が成り立つ.

1. $\nabla\times(\alpha\boldsymbol{f}+\beta\boldsymbol{g})=\alpha\nabla\times\boldsymbol{f}+\beta\nabla\times\boldsymbol{g}$
2. スカラー場 $f(x,y,z)$ とベクトル場 $\boldsymbol{g}(x,y,z)$ に対し

$$\nabla\times(f\boldsymbol{g})=\nabla f\times\boldsymbol{g}+f(\nabla\times\boldsymbol{g})$$

2.3.1　回転の意味

回転はベクトル場での渦巻きの流速ベクトルを表す．図 2.1 で示したように，空間のベクトル場

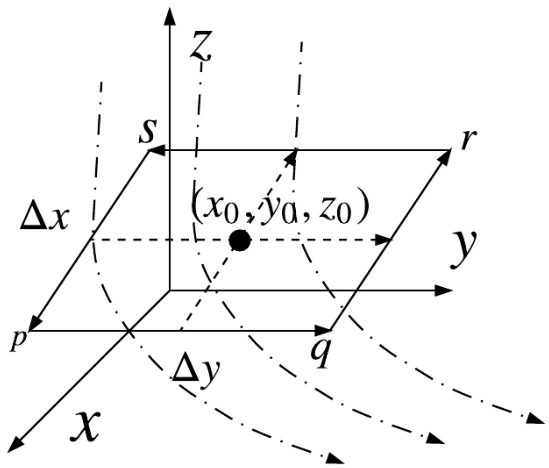

図 2.1　長方形渦の大きさ

$\boldsymbol{f}(x,y,z)$ で法線ベクトルが z 軸の正の方向と一致する有向平面において，中心の座標が (x_0,y_0,z_0) で，x 軸と y 軸で長さがそれぞれ Δx と Δy となる長方形 C があるとすると，この長方形 C での渦の大きさは

$$\begin{aligned}
&f_y(x_0+\Delta x/2,y_0,z_0)\Delta y - f_x(x_0,y_0+\Delta y/2,z_0)\Delta x\\
&-f_y(x_0-\Delta x/2,y_0,z_0)\Delta y + f_x(x_0,y_0-\Delta y/2,z_0)\Delta x\\
=&\left(f_y(x_0+\Delta x/2,y_0,z_0) - f_y(x_0-\Delta x/2,y_0,z_0)\right)\Delta y\\
&-\left(f_x(x_0,y_0+\Delta y/2,z_0) - f_x(x_0,y_0-\Delta y/2,z_0)\right)\Delta x\\
=&\left(\frac{f_y(x_0+\Delta x/2,y_0,z_0) - f_y(x_0-\Delta x/2,y_0,z_0)}{\Delta x}\right)\Delta x\Delta y\\
&-\left(\frac{f_x(x_0,y_0+\Delta y/2,z_0) - f_x(x_0,y_0-\Delta y/2,z_0)}{\Delta y}\right)\Delta x\Delta y\\
\approx&\left(\frac{\partial f_y}{\partial x} - \frac{\partial f_x}{\partial y}\right)\Delta x\Delta y\\
=&\left(\nabla\times\boldsymbol{f}\right)_z\Delta x\Delta y
\end{aligned}$$

なお，符号が負になる項は $f_x>0$, $f_y>0$ となる位置で，C 上の渦の方向と f_x もしくは f_y の方向が反対であるためである．

2.4　ナブラを含む微分演算の公式とその応用

三つのベクトル $\boldsymbol{f},\boldsymbol{g},\boldsymbol{h}$ に対して，内積と外積のあり得る四通り組み合わせに対して以下の等式が成り立つ。

三つのベクトルの積演算

1. $(\boldsymbol{f}\times\boldsymbol{g})\cdot\boldsymbol{h} = (\boldsymbol{h}\times\boldsymbol{f})\cdot\boldsymbol{g} = (\boldsymbol{g}\times\boldsymbol{h})\cdot\boldsymbol{f}$
2. $\boldsymbol{f}\cdot(\boldsymbol{g}\times\boldsymbol{h}) = \boldsymbol{h}\cdot(\boldsymbol{f}\times\boldsymbol{g}) = \boldsymbol{g}\cdot(\boldsymbol{h}\times\boldsymbol{f})$
3. $(\boldsymbol{f}\times\boldsymbol{g})\times\boldsymbol{h} = (\boldsymbol{f}\cdot\boldsymbol{h})\boldsymbol{g} - (\boldsymbol{g}\cdot\boldsymbol{h})\boldsymbol{f}$
4. $\boldsymbol{f}\times(\boldsymbol{g}\times\boldsymbol{h}) = (\boldsymbol{f}\cdot\boldsymbol{h})\boldsymbol{g} - (\boldsymbol{f}\cdot\boldsymbol{g})\boldsymbol{h}$

また、$\nabla = \left(\dfrac{\partial}{\partial x}, \dfrac{\partial}{\partial y}, \dfrac{\partial}{\partial z}\right)$ は微分演算子であるので，関数 f, g の積の微分の公式

$$\frac{d(fg)}{dx} = \frac{df}{dx}g + f\frac{dg}{dx}$$

より

ナブラとスカラー関数を含む積演算

5. $\nabla(fg) = g\nabla f + f\nabla g$
6. $\nabla\cdot(f\boldsymbol{g}) = (\nabla f)\cdot\boldsymbol{g} + f(\nabla\cdot\boldsymbol{g})$
7. $\nabla\times(f\boldsymbol{g}) = (\nabla f)\times\boldsymbol{g} + f(\nabla\times\boldsymbol{g})$

が成り立つことも容易に導ける.

ナブラとベクトル関数を含む積演算

8. $\nabla(\boldsymbol{f}\cdot\boldsymbol{g}) = (\boldsymbol{g}\cdot\nabla)\boldsymbol{f} + (\boldsymbol{f}\cdot\nabla)\boldsymbol{g} + \boldsymbol{f}\times(\nabla\times\boldsymbol{g}) + \boldsymbol{g}\times(\nabla\times\boldsymbol{f})$
9. $\nabla\cdot(\boldsymbol{f}\times\boldsymbol{g}) = (\nabla\times\boldsymbol{f})\cdot\boldsymbol{g} - (\nabla\times\boldsymbol{g})\cdot\boldsymbol{f}$
10. $\nabla\times(\boldsymbol{f}\times\boldsymbol{g}) = (\nabla\cdot\boldsymbol{g})\boldsymbol{f} - (\nabla\cdot\boldsymbol{f})\boldsymbol{g} + (\boldsymbol{g}\cdot\nabla)\boldsymbol{f} - (\boldsymbol{f}\cdot\nabla)\boldsymbol{g}$

【式 8 の証明】

ここでは，左辺と右辺の x 成分が同じであることを証明するが、y と z 成分も同じである。定義により

$$\boldsymbol{f}\cdot\nabla = f_x\frac{\partial}{\partial x} + f_y\frac{\partial}{\partial y} + f_z\frac{\partial}{\partial z}$$

なので、右辺の第 1,2 項の x 成分は

$$\left(f_x\frac{\partial g_x}{\partial x} + f_y\frac{\partial g_x}{\partial y} + f_z\frac{\partial g_x}{\partial z}\right) + \left(g_x\frac{\partial f_x}{\partial x} + g_y\frac{\partial f_x}{\partial y} + g_z\frac{\partial f_x}{\partial z}\right)$$

である。また、第 3,4 項の x 成分は

$$\begin{aligned}
\begin{vmatrix} g_y & g_z \\ \frac{\partial f_x}{\partial z} - \frac{\partial f_z}{\partial x} & \frac{\partial f_y}{\partial x} - \frac{\partial f_x}{\partial y} \end{vmatrix} &= g_y\left(\frac{\partial f_y}{\partial x} - \frac{\partial f_x}{\partial y}\right) - g_z\left(\frac{\partial f_x}{\partial z} - \frac{\partial f_z}{\partial x}\right) \\
\begin{vmatrix} f_y & f_z \\ \frac{\partial g_x}{\partial z} - \frac{\partial g_z}{\partial x} & \frac{\partial g_y}{\partial x} - \frac{\partial g_x}{\partial y} \end{vmatrix} &= f_y\left(\frac{\partial g_y}{\partial x} - \frac{\partial g_x}{\partial y}\right) - f_z\left(\frac{\partial g_x}{\partial z} - \frac{\partial g_z}{\partial x}\right)
\end{aligned}$$

であるので、右辺の和は

$$\begin{aligned}
&\left(f_x\frac{\partial g_x}{\partial x} + g_x\frac{\partial f_x}{\partial x}\right) + \left(f_y\frac{\partial g_y}{\partial x} + g_y\frac{\partial f_y}{\partial x}\right) + \left(f_z\frac{\partial g_z}{\partial x} + g_z\frac{\partial f_z}{\partial x}\right) \\
&= \frac{\partial}{\partial x}\left(f_x g_z + f_y g_y + f_z g_z\right)
\end{aligned}$$

で表せる。これは、左辺

$$\nabla(\boldsymbol{f}\cdot\boldsymbol{g}) = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right)(f_x g_x + f_y g_y + f_z g_z)$$

の x 成分と一致する。

【式 9 の証明】

関数の積の微分公式により

$$\nabla\cdot(\boldsymbol{f}\times\boldsymbol{g}) = \nabla_{\boldsymbol{f}}\cdot(\boldsymbol{f}\times\boldsymbol{g}) + \nabla_{\boldsymbol{g}}\cdot(\boldsymbol{f}\times\boldsymbol{g})$$

が成り立つ。一方、性質 2 より

$$\begin{gathered}\nabla_{\boldsymbol{f}}\cdot(\boldsymbol{f}\times\boldsymbol{g}) = \boldsymbol{g}\cdot(\nabla\times\boldsymbol{f})\\ \nabla_{\boldsymbol{g}}\cdot(\boldsymbol{f}\times\boldsymbol{g}) = -\boldsymbol{f}\cdot(\nabla\times\boldsymbol{g})\end{gathered}$$

が成り立つので

$$\nabla\cdot(\boldsymbol{f}\times\boldsymbol{g}) = (\nabla\times\boldsymbol{f})\cdot\boldsymbol{g} - \boldsymbol{f}\cdot(\nabla\times\boldsymbol{g})$$

である。

【式 10 の証明】

関数の積の微分公式により

$$\nabla\times(\boldsymbol{f}\times\boldsymbol{g}) = \nabla_{\boldsymbol{f}}\times(\boldsymbol{f}\times\boldsymbol{g}) + \nabla_{\boldsymbol{g}}\times(\boldsymbol{f}\times\boldsymbol{g})$$

が成り立つが、$\nabla_{\boldsymbol{f}}$ と $\nabla_{\boldsymbol{g}}$ はそれぞれ $\boldsymbol{f}$ と $\boldsymbol{g}$ に対する微分を表す。

一方、性質 4 より

$$\begin{gathered}\nabla_{\boldsymbol{f}}\times(\boldsymbol{f}\times\boldsymbol{g}) = (\boldsymbol{g}\cdot\nabla)\boldsymbol{f} - \boldsymbol{g}(\nabla\cdot\boldsymbol{f})\\ \nabla_{\boldsymbol{g}}\times(\boldsymbol{f}\times\boldsymbol{g}) = \boldsymbol{f}(\nabla\cdot\boldsymbol{g}) - (\boldsymbol{f}\cdot\nabla)\boldsymbol{g}\end{gathered}$$

が成り立つので式 10 となる。

二つのナブラを含む積演算

11. $\nabla\cdot(\nabla f) = \nabla^2 f$
12. $\nabla\times(\nabla f) = \mathbf{0}$
13. $\nabla\cdot(\nabla\times\boldsymbol{f}) = 0$
14. $\nabla\times(\nabla\times\boldsymbol{f}) = \nabla(\nabla\cdot\boldsymbol{f}) - \nabla^2\boldsymbol{f}$

    ただし、

$$\nabla^2\boldsymbol{f} := \left(\frac{\partial^2 f_x}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f_x}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 f_x}{\partial z^2}, \frac{\partial^2 f_y}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f_y}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 f_y}{\partial z^2}, \frac{\partial^2 f_z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f_z}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 f_z}{\partial z^2}\right)$$

    である。

【式 14 の証明】

右辺の x 成分は

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f_x}{\partial x}+\frac{\partial f_y}{\partial y}+\frac{\partial f_z}{\partial z}\right) - \left(\frac{\partial^2 f_x}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f_x}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 f_x}{\partial z^2}\right)$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{\partial^2 f_y}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 f_z}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 f_x}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 f_x}{\partial z^2} \\
&= \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f_y}{\partial x} - \frac{\partial f_x}{\partial y}\right) - \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial f_x}{\partial z} - \frac{\partial f_z}{\partial x}\right)
\end{aligned}
$$

同じく y 成分と z 成分はそれぞれ

$$
\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial f_z}{\partial y} - \frac{\partial f_y}{\partial z}\right) - \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f_y}{\partial x} - \frac{\partial f_x}{\partial y}\right)
$$

および

$$
\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f_x}{\partial z} - \frac{\partial f_z}{\partial x}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f_z}{\partial y} - \frac{\partial f_y}{\partial z}\right)
$$

である。従って、右辺の和は

$$
\begin{vmatrix}
\boldsymbol{e}_x & \boldsymbol{e}_y & \boldsymbol{e}_z \\
\dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\
\left(\frac{\partial f_z}{\partial y} - \frac{\partial f_y}{\partial z}\right) & \left(\frac{\partial f_x}{\partial z} - \frac{\partial f_z}{\partial x}\right) & \left(\frac{\partial f_y}{\partial x} - \frac{\partial f_x}{\partial y}\right)
\end{vmatrix} = \nabla \times (\nabla \times \boldsymbol{f})
$$

で表せる。

例 4. 電荷も電流も存在しない真空中における電場 $\boldsymbol{E}$、磁場 $\boldsymbol{B}$ の関係は次のような方程式で与えられる。

$$
\nabla \times \boldsymbol{E} + \frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} = 0 \tag{2.1}
$$

$$
\nabla \times \boldsymbol{B} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t} = 0 \tag{2.2}
$$

$$
\nabla \cdot \boldsymbol{E} = 0 \tag{2.3}
$$

$$
\nabla \cdot \boldsymbol{B} = 0 \tag{2.4}
$$

ただし、c は定数である。これらから

$$
\begin{aligned}
\nabla^2 \boldsymbol{E} &= \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \boldsymbol{E}}{\partial t^2} \\
\nabla^2 \boldsymbol{B} &= \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \boldsymbol{B}}{\partial t^2}
\end{aligned}
$$

を導け。

【回答例】

式 (2.1) の第二項を右辺に移項し、両辺に回転をかけると

$$
\nabla \times (\nabla \times \boldsymbol{E}) = -\nabla \times \frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}
$$

を得る。左辺には性質 14 を適応し、右辺は微分の順番を交換すると

$$
\nabla(\nabla \cdot \boldsymbol{E}) - \nabla^2 \boldsymbol{E} = -\frac{\partial}{\partial t}(\nabla \times \boldsymbol{B})
$$

となる。式 (2.3) より、$\nabla(\nabla\cdot\boldsymbol{E})=0$ となり、また (2.2) より $\dfrac{\partial}{\partial t}(\nabla\times\boldsymbol{B})=\dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial^2\boldsymbol{E}}{\partial t^2}$ が得られるので

$$\nabla^2\boldsymbol{E}=\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\boldsymbol{E}}{\partial t^2}$$

である。
同じように式 (2.2) の第二項を右辺に移項し、両辺に回転をかけ

$$\nabla(\nabla\cdot\boldsymbol{B})-\nabla^2\boldsymbol{B}=\frac{1}{c^2}\frac{\partial}{\partial t}(\nabla\times\boldsymbol{E})$$

が得られ、式 (2.4) 及び (2.1) より

$$\nabla^2\boldsymbol{B}=\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\boldsymbol{B}}{\partial t^2}$$

となる。

演習問題

1. ベクトル場 $\boldsymbol{r}(x,y,z)=(x,y,z)$ に対して，$r=|\boldsymbol{r}|=\sqrt{x^2+y^2+z^2}\neq 0$ とおき，次の値を r，$\boldsymbol{r}$，$f(r)$，$\frac{d[f(r)]}{dr}$ および $\frac{d^2[f(r)]}{dr^2}$ を用いて表わせよ.
   (a) $\nabla f(r)$
   (b) $\nabla\cdot[f(r)\boldsymbol{r}]$
   (c) $\nabla^2 f(r)$
2. スカラー場 $f(x,y,z)=2xy^2-x^3z^2$ に対して，$\nabla\times(\nabla f)$ を求めよ.
3. スカラー場 $f(x,y,z)$ と $g(x,y,z)$ に対して，$\nabla\cdot(\nabla f\times\nabla g)=0$ を証明せよ.
4. $\boldsymbol{f}=(x,y,z)$,$\boldsymbol{g}=(x^2,y,0)$ とし、性質 8 が成り立つことを確かめよ。

第 3 章

空間上の積分

3.1 線積分

空間曲線

定義 17. 空間上の点 c の位置ベクトルが変数 u の関数として

$$\boldsymbol{c}(u) = (c_x(u), c_y(u), c_z(u)) \tag{3.1}$$

であるとき，変数 u の変化区間 $a \leq u \leq b$ での c の軌跡は

$$C : (\boldsymbol{c}(u))_{u=a}^{b} = (c_x(u), c_y(u), c_z(u))_{u=a}^{b}$$

空間曲線となり，式 (3.1) を**空間曲線の方程式**という．

接ベクトル　空間曲線 C の**接ベクトル**は

$$\lim_{\Delta u \to 0} \frac{\Delta C}{\Delta u} = \lim_{\Delta u \to 0} \frac{\boldsymbol{c}(u + \Delta u) - \boldsymbol{c}(u)}{\Delta u} = \frac{d\boldsymbol{c}(u)}{du} = \left(\frac{dc_x(u)}{du}, \frac{dc_y(u)}{du}, \frac{dc_z(u)}{du} \right) \tag{3.2}$$

で与えられる．

弧長　空間曲線 C の微小な接ベクトル $d\boldsymbol{c}$ の長さ dC は

$$dC = |d\boldsymbol{c}| = \left| \frac{d\boldsymbol{c}}{du} du \right| = \left| \frac{d\boldsymbol{c}}{du} \right| du \tag{3.3}$$

となるので，$a \leq u \leq b$ で変化するときの弧長は

$$\int_C dC = \int_C |d\boldsymbol{c}| = \int_a^b \left| \frac{d\boldsymbol{c}}{du} \right| du$$

で与えられる．

線積分

定義 18. 空間のスカラー場 $f(x, y, z)$ において，空間曲線 $C : (\boldsymbol{c}(u))_{u=a}^{b}$ が与えられたとき

$$\begin{aligned}&\int_C f(c_x, c_y, c_z)dC \\ &= \int_C f(\boldsymbol{c})|d\boldsymbol{c}| = \int_a^b f(\boldsymbol{c})\left|\frac{d\boldsymbol{c}}{du}\right| du \\ &= \int_a^b f(c_x, c_y, c_z)\sqrt{\left(\frac{dc_x}{du}\right)^2 + \left(\frac{c_y}{du}\right)^2 + \left(\frac{c_z}{du}\right)^2} du\end{aligned}$$

を曲線 C に沿っての f の線積分とよぶ.

例 5. $f(x, y, z) = x^2yz$, $C : \left(u, \frac{u^2}{2}, \frac{u^3}{6}\right)_{u=0}^{1}$ とすると

$$\sqrt{\left(\frac{dc_x}{du}\right)^2 + \left(\frac{c_y}{du}\right)^2 + \left(\frac{c_z}{du}\right)^2} = \sqrt{1^2 + u^2 + \left(\frac{u^2}{2}\right)^2} = \frac{u^2+2}{2}$$

より

$$\int_C f dC = \int_0^1 \frac{u^7}{12} \cdot \frac{u^2+2}{2} du = \frac{7}{480}$$

である.

3.1.1 ベクトル場の接線線積分

接線線積分

定義 19. ベクトル場 $\boldsymbol{f}(x, y, z) = (f_x(x, y, z), f_y(x, y, z), f_z(x, y, z))$ において，空間曲線 C : $(\boldsymbol{c}(u))_{u=a}^{b}$ が与えられたとき，ベクトル $\boldsymbol{f}(x, y, z)$ と $d\boldsymbol{c}$ との内積の C に沿っての線積分

$$\int_C \boldsymbol{f} \cdot d\boldsymbol{c}$$

をベクトル場 $\boldsymbol{f}$ の曲線 C に沿っての**接線線積分**と呼ぶ．曲線 C 単位接線ベクトル

$$\boldsymbol{t} = \frac{d\boldsymbol{c}}{du} = \left(\frac{dc_x}{du}, \frac{dc_y}{du}, \frac{dc_z}{du}\right)$$

を用いると，接線線積分は

$$\int_C \boldsymbol{f} \cdot d\boldsymbol{c} = \int_C \boldsymbol{f} \cdot \boldsymbol{t} dC = \int_a^b \boldsymbol{f} \cdot \boldsymbol{t} du$$

で表せる.

例 6. $C : (a\cos\theta, a\sin\theta, b\theta)_{\theta=0}^{\pi}$ のとき，ベクトル場 $\boldsymbol{f}(x,y,z) = (y,-z,x)$ の接線線積分を求めよ.

【回答】

$$\begin{cases} \dfrac{d(a\cos\theta)}{d\theta} &= -a\sin\theta \\ \dfrac{d(a\sin\theta)}{d\theta} &= a\cos\theta \\ \dfrac{d(b\theta)}{d\theta} &= b \end{cases}$$

より

$$\begin{aligned}\int_C \boldsymbol{f}\cdot d\boldsymbol{c} &= \int_0^{\pi} (a\sin\theta, -b\theta, a\cos\theta)\cdot(-a\sin\theta, a\cos\theta, b)\,d\theta \\ &= \int_0^{\pi} [a\sin\theta\cdot(-a\sin\theta) - b\theta\cdot a\cos\theta + a\cos\theta\cdot b]\,d\theta \\ &= \int_0^{\pi} \left(-a^2\sin^2\theta - ab\theta\cos\theta + ab\cos\theta\right)d\theta \\ &= -\frac{\pi a^2}{2} + 2ab\end{aligned}$$

【性質】

スカラー値関数 $f(x,y,z)$ の勾配ベクトル ∇f の接線線積分は，曲線 C の始点を a，終点を b とすると

$$\begin{aligned}\int_C \nabla f\cdot d\boldsymbol{c} &= \int_C \left(\frac{\partial f}{\partial c_x}, \frac{\partial f}{\partial c_y}, \frac{\partial f}{\partial c_z}\right)\cdot d\boldsymbol{c} \\ &= \int_C \left(\frac{\partial f}{\partial c_x}dc_x + \frac{\partial f}{\partial c_y}dc_y + \frac{\partial f}{\partial c_z}dc_z\right) \\ &= \int_C df = [f(x,y,z)]_a^b \\ &= f(b_x,b_y,b_z) - f(a_x,a_y,a_z)\end{aligned}$$

となって，2 点 a, b にだけ関係し，積分路に依存しない．とくに，曲線 C が閉曲線 (始点と終点が一致する曲線) のとき，線積分を $\oint_C$ と表すことにすれば

$$\oint_C \nabla f\cdot d\boldsymbol{c} = 0$$

である.

例 7. 上の例 5 でのスカラー場 $f(x,y,z) = x^2yz$ と曲線 $C : \left(u, \frac{u^2}{2}, \frac{u^3}{6}\right)_{u=0}^{1}$ に対して，線積分を

計算すると

$$\nabla f = \left(2c_x c_y c_z, c_x^2 c_z, c_x^2 c_y\right) = \left(\frac{u^6}{6}, \frac{u^5}{6}, \frac{u^4}{2}\right)$$
$$d\boldsymbol{c} = \left(1, u, \frac{u^2}{2}\right)$$

より

$$\int_C \nabla f \cdot d\boldsymbol{c} = \int_0^1 \left(\frac{u^6}{6} + \frac{u^6}{6} + \frac{u^6}{4}\right) du = \int_0^1 \frac{7u^6}{12} = \frac{1}{12}$$

が得られる．

一方，$\int_C \nabla f \cdot d\boldsymbol{c}$ が経路に依存しない性質を利用すると，$u = 0, 1$ に対応する曲線上の点の位置ベクトル $\boldsymbol{c}(0) = (0, 0, 0)$ 及び $\boldsymbol{c}(1) = \left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{6}\right)$ より

$$\int_C \nabla f \cdot d\boldsymbol{c} = f\left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{6}\right) - f\left(0, 0, 0\right) = \frac{1}{12}$$

と計算が簡単になる．

3.2 面積分

空間曲面

定義 20. 空間上の点 s の位置ベクトル $\boldsymbol{s}$ が変数 (u, v) の関数

$$\boldsymbol{s}(u, v) = (s_x(u, v), s_y(u, v), s_z(u, v)) \tag{3.4}$$

であるとき，変数 (u, v) の変化区間 $\mathbb{D}$ での s の軌跡

$$\mathbb{S} : (\boldsymbol{s}(u, v))_{(u,v)\in\mathbb{D}} = (s_x(u, v), s_y(u, v), s_z(u, v))_{(u,v)\in\mathbb{D}}$$

は**空間曲面**となり，式 (3.4) を**空間曲面の方程式**という．

v を固定したときの u についての微分係数 $\partial\boldsymbol{s}/\partial u$ は u 曲線に接し，同様に $\partial\boldsymbol{s}/\partial v$ で表されるベクトルは v 曲線に接する．

接平面，面素，面素ベクトル，単位法ベクトル

定義 21. 曲面 $\mathbb{S}:\boldsymbol{s}(u,v)$ に対して，$\partial\boldsymbol{s}/\partial u$, $\partial\boldsymbol{s}/\partial v$ を含む平面を**接平面**とし，接平面に垂直な単位ベクトル

$$\boldsymbol{n}=\frac{\frac{\partial\boldsymbol{s}}{\partial u}\times\frac{\partial\boldsymbol{s}}{\partial v}}{\left|\frac{\partial\boldsymbol{s}}{\partial u}\times\frac{\partial\boldsymbol{s}}{\partial v}\right|}$$

を**法単位ベクトル**と定義する．また，

$$\Delta\boldsymbol{s}_u=\boldsymbol{s}(u+\Delta u,v)-\boldsymbol{s}(u,v)\approx\frac{\partial\boldsymbol{s}}{\partial u}\Delta u$$

と

$$\Delta\boldsymbol{s}_v=\boldsymbol{s}(u,v+\Delta v)-\boldsymbol{s}(u,v)\approx\frac{\partial\boldsymbol{s}}{\partial v}\Delta v$$

に囲まれた四辺形の面積の極限

$$d\mathbb{S}=|\Delta\boldsymbol{s}_u\times\Delta\boldsymbol{s}_v|\approx\left|\frac{\partial\boldsymbol{s}}{\partial u}\times\frac{\partial\boldsymbol{s}}{\partial v}\right|dudv$$

を**面素**といい

$$d\boldsymbol{S}=\frac{\partial\boldsymbol{s}}{\partial u}\times\frac{\partial\boldsymbol{s}}{\partial v}dudv=\boldsymbol{n}d\mathbb{S}$$

を**面素ベクトル**という．

面積分

定義 22. 二次元変数 (u,v) の変化区間 $(u,v)\in\mathbb{D}$ に対して，曲面 $\mathbb{S}:(\boldsymbol{s}(u,v))_{(u,v)\in\mathbb{D}}$ が与えられたとき，空間のスカラー場 $f(x,y,z)$ では

$$\iint_{\mathbb{S}}fd\mathbb{S}=\iint_{\mathbb{D}}f(s_x(u,v),s_y(u,v),s_z(u,v))\left|\frac{\partial\boldsymbol{s}}{\partial u}\times\frac{\partial\boldsymbol{s}}{\partial v}\right|dudv$$

を $\mathbb{S}$ における**面積分**といい，ベクトル場 $\boldsymbol{f}=(f_x(x,y,z),f_y(x,y,z),f_z(x,y,z))$ においては

$$\iint_{\mathbb{S}}\boldsymbol{f}\cdot d\boldsymbol{S}=\iint_{\mathbb{S}}\boldsymbol{f}\cdot\boldsymbol{n}d\mathbb{S}$$

を**ベクトル場の面積分**という．

例 8. スカラー場 $f=x+y+z$ において，半径 a の半球面

$$\mathbb{S}:(a\sin u\cos v,a\sin u\sin v,a\cos u)_{(u,v)\in\mathbb{D}},\quad\mathbb{D}:(u,v)_{u=0,v=0}^{\frac{\pi}{2},2\pi}$$

における面積分を計算せよ．

【回答】

$$
\frac{\partial \boldsymbol{s}}{\partial u} = (a\cos u\cos v, a\cos u\sin v, -a\sin u)
$$
$$
\frac{\partial \boldsymbol{s}}{\partial u} = (-a\sin u\sin v, a\sin u\cos v, 0)
$$

より

$$
\begin{aligned}
\left|\frac{\partial \boldsymbol{s}}{\partial u}\times\frac{\partial \boldsymbol{s}}{\partial v}\right| &= \begin{vmatrix} \boldsymbol{e}_x & \boldsymbol{e}_y & \boldsymbol{e}_z \\ a\cos u\cos v & a\cos u\sin v & -a\sin u \\ -a\sin u\sin v & a\sin u\cos v & 0 \end{vmatrix} \\
&= \left|\left(a^2\sin^2 u\cos v, a^2\sin^2 u\sin v, a^2\cos u\sin u\right)\right| \\
&= \sqrt{a^4\sin^4 u + a^4\cos^2 u\sin^2 u} = a^2\sin u
\end{aligned}
$$

従って,

$$
\begin{aligned}
&\iint_{\mathbb{S}} f d\mathbb{S} \\
&= \iint_{\mathbb{D}} (a\sin u\cos v + a\sin u\sin v + a\cos u)(a^2\sin u)dudv \\
&= a^3\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 udu\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos vdv + \int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 udu\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin vdv + \int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin u\cos udu\int_0^{\frac{\pi}{2}}dv\right) \\
&= 2a^3\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin u\cos udu = \pi a^3
\end{aligned}
$$

例 9. 平面 $\mathbb{S}: z = 1-x-y,\ x \geq 0,\ y \geq 0,\ z \geq 0$ におけるベクトル場 $\boldsymbol{f} = (2x, -y, z)$ の面積分 $\iint_{\mathbb{S}} \boldsymbol{f}\cdot d\boldsymbol{S}$ を計算せよ．ただし，平面 $\mathbb{S}$ における方単位ベクトル $\boldsymbol{n}$ の向きは，原点から遠ざかるように選ぶ.

【回答】

$\mathbb{S}: z = 1-x-y$ および $z \geq 0$ より，変数 x を $x \geq 0$ で変化させると，y は $0 \leq y \leq 1-x$ の範囲内で変化する．故に，平面上の点の座標は x,y を用いて

$$
\mathbb{S}: (x, y, 1-x-y)_{x=0,y=0}^{1,1-x}
$$

で表せる.

一方

$$
\frac{\partial \boldsymbol{s}}{\partial x}\times\frac{\partial \boldsymbol{s}}{\partial y} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{e}_x & \boldsymbol{e}_y & \boldsymbol{e}_z \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = (1, 1, 1)
$$

より

$$
\iint_{\mathbb{S}} \boldsymbol{f}\cdot d\boldsymbol{S}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \int_0^1 \int_0^{1-x} (2x, -y, 1-x-y) \cdot (1,1,1) dydx \\
&= \int_0^1 \int_0^{1-x} (x - 2y + 1) dydx \\
&= \int_0^1 \left[(x+1)y - y^2\right]_0^{1-x} dx \\
&= \int_0^1 2x - 2x^2 dx = \frac{1}{3}
\end{aligned}
$$

3.3 体積分

体積 $\mathcal{V}$ があるとき，この体積上の点 v の位置ベクトル $\boldsymbol{v}$ は 3 変数で表せるので，x,y,z の関数としてと表せる．

体積分

定義 23. 空間上で体積 $\mathcal{V}$ が与えられたとき，スカラー場 $f(x,y,z)$ において

$$\iiint_{\mathcal{V}} f(x,y,z)d\mathcal{V} = \iiint_{\mathcal{V}} f(x,y,z)dxdydz$$

を $\mathcal{V}$ における**体積分**という．ベクトル場の体積分は $\boldsymbol{f}$ の各成分を体積分したもの

$$\iiint_{\mathcal{V}} \boldsymbol{f}(x,y,z)d\mathcal{V} = \iiint_{\mathcal{V}} (f_x\boldsymbol{e}_x + f_y\boldsymbol{e}_y + f_z\boldsymbol{e}_z)\, d\mathcal{V}$$

である．

例 10. 領域 $\mathcal{V}: x+y+z \leq 1,\ x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0$ の体積を求めよ．

【回答】

$x+y+z \leq 1$ を満たす変数の変化範囲を考える．x を *0* から *1* まで変化させると，与えられた x に対して，y の変化範囲は *0* から $1-x$ となる．さらに y を固定すると z の変化範囲は *0* から $1-x-y$ となるので体積は

$$\begin{aligned}
&\iiint_{\mathcal{V}} d\mathcal{V} \\
&= \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \int_0^{1-x-y} dz \\
&= \int_0^1 dx \int_0^{1-x} 1-x-ydy \\
&= \frac{1}{2}\int_0^1 (1-x)^2 dx = \frac{1}{6}
\end{aligned}$$

である．

3.3.1 ヤコビアンと座標系変換

ヤコビ行列，ヤコビアン

定義 24. 独立した 3 つの変数 u, v, w とその関数 $x(u, v, w)$,$y(u, v, w)$,$z(u, v, w)$ が与えられたとき

$$\begin{pmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial w} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial w} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial w} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} du \\ dv \\ dw \end{pmatrix}$$

となるが

$$J = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial w} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial w} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial w} \end{pmatrix}$$

を**ヤコビ行列**といい，この無限小変換の体積比

$$|J| = \left| \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, w)} \right| = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial w} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial w} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial w} \end{vmatrix}$$

を x, y, z の u, v, w に関する**ヤコビアン**と呼ぶ.

【性質】

$(u, v, w) \in \mathcal{U}$ のとき，$(x, y, z) \in \mathcal{V}$ とすると

1. 領域 $\mathcal{U}$ と $\mathcal{V}$ の点が一対一に対応
2. x, y, z が偏微分可能で導関数が連続
3. $\mathcal{U}$ でヤコビアン $|J|$ が零でないとき

$$\iiint_{\mathcal{V}} f(x, y, z) dxdydz = \iiint_{\mathcal{U}} f(x(u, v, w), y(u, v, w), z(u, v, w))|J|dudvdw$$

となる.

3.3.2 極座標系

点 a の座標を直交座標系で (x, y), 極座標系で (r, θ) とすると，両座標の関係は

$$\begin{cases} x &= r\cos\theta \\ y &= r\sin\theta \end{cases}$$

となるので

$$|J| = \begin{vmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{vmatrix} = r$$

となる.

例 11.

$$
\begin{aligned}
&\iint_{x^2+y^2\leq 1} e^{-(x^2+y^2)}dxdy \\
&= \int_0^1 \int_0^{2\pi} e^{-r^2} r dr d\theta \\
&= \int_0^1 e^{-r^2} r dr \int_0^{2\pi} d\theta \\
&= 2\pi \left[-\frac{e^{-r^2}}{2} \right]_0^1 \\
&= \pi(1-e^{-1})
\end{aligned}
$$

3.3.3　円柱座標系

点 a の座標を直交座標系で (x, y, z), 円柱座標系で (r, θ, z) とすると，両座標の関係は

$$
\begin{cases}
x &= r\cos\theta \\
y &= r\sin\theta \\
z &= z
\end{cases}
\tag{3.5}
$$

となるので

$$
|J| = \begin{vmatrix}
\cos\theta & -r\sin\theta & 0 \\
\sin\theta & r\cos\theta & 0 \\
0 & 0 & 1
\end{vmatrix} = r
$$

である．

3.3.4　球座標系

点 a の座標を直交座標系で (x, y, z), 球座標系で (r, θ, ϕ) とすると，両座標の関係は

$$
\begin{cases}
x &= r\sin\theta\cos\phi \\
y &= r\sin\theta\sin\phi \\
z &= r\cos\theta
\end{cases}
\tag{3.6}
$$

となるので

$$
|J| = \begin{vmatrix}
\sin\theta\cos\phi & r\cos\theta\cos\phi & -r\sin\theta\sin\phi \\
\sin\theta\sin\phi & r\cos\theta\sin\phi & r\sin\theta\cos\phi \\
\cos\theta & -r\sin\theta & 0
\end{vmatrix} = r^2\sin\theta
\tag{3.7}
$$

である．

例 12. 原点を中心とする半径 *1* の級の内部領域を $\mathcal{V}$ とした場合

$$\iiint_{\mathcal{V}}(x^2+y^2+z^2)d\mathcal{V}$$

を計算すると式 (*3.6*) 及び (*3.7*) より

$$\iiint_{\mathcal{V}}(x^2+y^2+z^2)d\mathcal{V}=\iiint_{\mathcal{V}}r^2 d\mathcal{V}$$
$$=\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{1}r^2\cdot r^2\sin\theta dr d\theta d\phi=\frac{4}{5}\pi$$

3.4 ガウスの発散定理

定理 1 (ガウスの発散定理)**.** 閉曲面 $\mathbb{S}$ によって囲まれた領域 $\mathcal{V}$ がベクトル場 $\boldsymbol{f}$ であるとき

$$\iiint_{\mathcal{V}} \nabla \cdot \boldsymbol{f} d\mathcal{V} = \iint_{\mathbb{S}} \boldsymbol{f} \cdot \boldsymbol{n} d\mathbb{S}$$

ただし，法線ベクトル $\boldsymbol{n}$ は外向きにとるものとする．

閉曲面 $\mathbb{S}$ が上側 $\mathbb{S}_U$ と下側 $\mathbb{S}_D$ からできているとする．xy 平面上への $\mathbb{S}_U$ と $\mathbb{S}_D$ の正射影を $\mathbb{M}$ とし

$$\mathbb{S}_U : z = g_U(x,y),\ \mathbb{S}_D : z = g_D(x,y)$$

とすると，$(x,y) \in \mathbb{M}$ で $\mathbb{S}_D$ で $\boldsymbol{e}_z \cdot \boldsymbol{n} < 0$ だから

$$\begin{aligned}
&\iiint_{\mathcal{V}} \frac{\partial f_z}{\partial z} d\mathcal{V} = \iiint_{\mathcal{V}} \frac{\partial f_z}{\partial z} dxdydz = \iint_{\mathbb{M}} \left(\int_{g_U}^{g_D} \frac{\partial f_z}{\partial z} dz \right) dxdy \\
&= \iint_{\mathbb{M}} f_z(x,y,g_U(x,y))dxdy - \iint_{\mathbb{M}} f_z(x,y,g_D(x,y))dxdy \\
&= \iint_{\mathbb{S}_U} f_z \boldsymbol{e}_z \cdot \boldsymbol{n} d\mathbb{S} + \iint_{\mathbb{S}_D} f_z \boldsymbol{e}_z \cdot \boldsymbol{n} d\mathbb{S} = \iint_{\mathbb{S}} f_z \boldsymbol{e}_z \cdot \boldsymbol{n} d\mathbb{S} = \iint_{\mathbb{S}} f_z dxdy
\end{aligned}$$

同様に

$$\begin{aligned}
\iiint_{\mathcal{V}} \frac{\partial f_x}{\partial dx} d\mathcal{V} = \iint_{\mathbb{S}} f_x \boldsymbol{e}_x \cdot \boldsymbol{n} d\mathbb{S} = \iint_{\mathbb{S}} f_x dydz \\
\iiint_{\mathcal{V}} \frac{\partial f_y}{\partial dy} d\mathcal{V} = \iint_{\mathbb{S}} f_y \boldsymbol{e}_y \cdot \boldsymbol{n} d\mathbb{S} = \iint_{\mathbb{S}} f_y dydz
\end{aligned}$$

となる．これら *3* つの和をとると

$$\begin{aligned}
&\iiint_{\mathcal{V}} \frac{\partial f_x}{\partial dx} d\mathcal{V} + \iiint_{\mathcal{V}} \frac{\partial f_y}{\partial dy} d\mathcal{V} + \iiint_{\mathcal{V}} \frac{\partial f_z}{\partial dz} d\mathcal{V} \\
&= \iint_{\mathbb{S}} f_x \boldsymbol{e}_x \cdot \boldsymbol{n} d\mathbb{S} + \iint_{\mathbb{S}} f_y \boldsymbol{e}_y \cdot \boldsymbol{n} d\mathbb{S} + \iint_{\mathbb{S}} f_z \boldsymbol{e}_z \cdot \boldsymbol{n} d\mathbb{S}
\end{aligned}$$

となり，定理が証明される．

ベクトル場 $\boldsymbol{f}$ に対して，$\nabla \cdot \boldsymbol{v}$ は単位体積あたりの単位時間における湧出量であるから $\displaystyle\iiint_{\mathcal{V}} \nabla \boldsymbol{f} \cdot d\mathcal{V}$ は曲面 $\mathbb{S}$ 内の全湧出量である．発散定理ではこれが単位時間に曲面 $\mathbb{S}$ を通過して外に出る量 $\displaystyle\iint_{\mathbb{S}} \boldsymbol{f} \cdot \boldsymbol{n}\mathbb{S}$ に等しいことを主張している．

例 13. 半球面 $\mathbb{S}: x^2+y^2+z^2=1, z \geq 0$ 上において，ベクトル場 $\boldsymbol{f}=(xz, yz, 0)$ の面積分 $\displaystyle\iint_{\mathbb{S}} \boldsymbol{f} \cdot d\boldsymbol{S}$ を計算せよ．

【回答】

半球面 $\mathbb{S}$ およびその底面 $\mathbb{S}': x^2+y^2 \leq 1,\ z=0$ の和集合は半球領域 $\mathcal{V}: x^2+y^2+z^2 \leq 1,\ z \geq 0$ の閉曲面であるので，ガウスの発散定理より

$$\iiint_{\mathcal{V}} \nabla \cdot \boldsymbol{f} d\mathcal{V}=\iint_{\mathbb{S}} \boldsymbol{f} \cdot d\boldsymbol{S}+\iint_{\mathbb{S}'} \boldsymbol{f} \cdot d\boldsymbol{S}$$

であるが，$\mathbb{S}'$ で $\boldsymbol{f}=\boldsymbol{0}$ であるため

$$\iiint_{\mathcal{V}} \nabla \cdot \boldsymbol{f} d\mathcal{V}=\iint_{\mathbb{S}} \boldsymbol{f} \cdot d\boldsymbol{S}$$

である．$\nabla \cdot \boldsymbol{f}=2z$ より

$$\begin{aligned}
\iint_{\mathbb{S}} \boldsymbol{f} \cdot d\boldsymbol{S} &= \iiint_{\mathcal{V}} 2z d\mathcal{V}=2\int_0^1 z dz \iint_{x^2+y^2 \leq 1-z^2} dxdy \\
&= 2\int_0^1 z\pi(1-z^2) dz=2\pi\int_0^1 (z-z^3) dz \\
&= \frac{\pi}{2}
\end{aligned}$$

3.5　ストークスの定理

定理 2. ベクトル場 $\boldsymbol{f}$ 内に曲面 $\mathbb{S}$ があり，その境界が閉曲線 C であるとする．曲面の単位法線ベクトル $\boldsymbol{n}$ を $\mathbb{S}$ の正の側にとり，C を正の方向にまわるとき

$$\iint_{\mathbb{S}} \nabla \times \boldsymbol{f} \cdot d\boldsymbol{S} = \oint_C \boldsymbol{f} \cdot d\boldsymbol{c}$$

ただし，法線ベクトル $\boldsymbol{n}$ は外向きにとるものとする．

$\boldsymbol{S}$ を xy 平面で両辺の長さが a と b となり，法線方向が z 軸と同じの長方形とすると，面積分は

$$\begin{aligned}\iint_{\mathbb{S}} \nabla \times \boldsymbol{f} \cdot d\boldsymbol{S} &= \iint_{\mathbb{S}} \left(\frac{\partial f_y}{\partial x} - \frac{\partial f_x}{\partial y} \right) dxdy \\ &= \int_0^b \int_0^a \left(\frac{\partial f_y}{\partial x} - \frac{\partial f_x}{\partial y} \right) dxdy\end{aligned}$$

となる．積分において

$$\int_a^b f'(x)dx = \int_a^b \frac{df(x)}{dx} dx = [f(x)]_a^b$$

となるので，上の式は

$$\begin{aligned}&\int_0^b [f_y]_0^a \, dy - \int_0^a [f_x]_0^b \, dx \\ &= \int_0^b f_y(a,y,0)dy - \int_0^b f_y(0,y,0)dy - \int_0^a f_x(x,b,0)dx + \int_0^a f_x(x,0,0)dx \\ &= \int_{C_1} \boldsymbol{f} \cdot d\boldsymbol{c} + \int_{C_2} \boldsymbol{f} \cdot d\boldsymbol{c} + \int_{C_3} \boldsymbol{f} \cdot d\boldsymbol{c} + \int_{C_4} \boldsymbol{f} \cdot d\boldsymbol{c} \\ &= \oint_C \boldsymbol{f} \cdot d\boldsymbol{c}\end{aligned}$$

となる[a]．

[a] 作図ソフトに慣れてないので，C_1,C_2, C_3, C_4 の位置は板書で説明する．

ストークス定理は閉曲線を縁とする曲面内の回転の総量はその閉曲線に沿うベクトル $\boldsymbol{f}$ の線積分に等しいことを意味する．

例 14. 球面 $x^2 + y^2 + (z-3)^2 = 3^2$ と平面 $z = x + 3$ の交わりを C とし，原点からみて時計回りを正の向きとする．このとき，ベクトル場 $\boldsymbol{f} = (2y, z, 3y)$ について線積分 $\oint_C \boldsymbol{f} \cdot d\boldsymbol{c}$ を計算せよ．

【回答】

球 $x^2+y^2+(z-3)^2 \leq 3^2$ を平面 $z=x+3$ で切った断面を $\mathbb{S}$ とする．この平面の xy 平面に対する正射影は平面の方程式を球面に代入して

$$\mathbb{D}: 2x^2+y^2 \leq 3^2$$

となるがその面積は

$$\iint_{\mathbb{D}} dxdy = 4\int_0^3 \int_0^{\sqrt{\frac{3^2-y^2}{2}}} dxdy = 4\int_0^3 \sqrt{\frac{3^2-y^2}{2}}dy$$

$y=3\sin\theta$ とおくと

$$4\int_0^3 \sqrt{\frac{3^2-y^2}{2}}dy = 4\int_0^{\pi/2} \frac{9\cos^2\theta}{\sqrt{2}}d\theta = \frac{18}{\sqrt{2}}\int_0^{\pi/2}(1+\cos 2\theta)d\theta = \frac{9\pi}{\sqrt{2}}$$

である．また，$\mathbb{S}=(x,y,x+3)$ より

$$d\boldsymbol{S} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{e}_x & \boldsymbol{e}_y & \boldsymbol{e}_z \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} dxdy = (-1,0,1)dxdy$$

一方

$$\nabla\times\boldsymbol{f} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{e}_x & \boldsymbol{e}_y & \boldsymbol{e}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 2y & z & 3y \end{vmatrix} = (2,0,-2)$$

なので，$\nabla\times\boldsymbol{f}\cdot d\boldsymbol{S} = -4dxdy$ であるので，ストークス定理より

$$\oint_C \boldsymbol{f}\cdot\boldsymbol{c} = \iint_{\mathbb{D}} -4dxdy = -18\sqrt{2}\pi$$

演習問題

1. スカラー場 $f(x,y,z)=x+y+z$ において，円柱ラ線

$$C: (\alpha\cos u, \alpha\sin u, \beta u)_{u=0}^{\pi}$$

に沿った $f(x,y,z)$ の線積分を求めよ．

2. ベクトル場 $\boldsymbol{f}(x,y,z)=(yz,zx,xy)$ において，原点 $o(0,0,0)$ から点 $a(1,2,2)$ までの直線に沿った接線線積分

$$\int_C \boldsymbol{f}\cdot d\boldsymbol{c}$$

の値５を

(a) 定義に基づいて計算せよ．

(b) 積分経路非依存性を利用して計算せよ．

3. 曲面

$$\mathbb{S} : (u\cos v, u\sin v, u)_{u=0,v=0}^{1,2\pi}$$

が与えられたとき，次の問に答えよ．

(a) $\mathbb{S}$ の概形を描け

(b) $\mathbb{S}$ の面積を求めよ．

(c) $\mathbb{S}$ 上で $\boldsymbol{f}(u,v) = (u,v,0)$ とするとき，法単位ベクトルの z 成分は正であるとし，面積分 $\displaystyle\iint_{\mathbb{S}} \boldsymbol{f}\cdot d\boldsymbol{S}$ を求めよ．

4. 原点から半径 r の球面の内部を $\mathcal{V}$ とし，ベクトル場 $\boldsymbol{f}(x,y,z) = (x^2, y^2, z^2)$ に対して，$\displaystyle\iiint_{\mathcal{V}} \boldsymbol{f} d\mathcal{V}$ を求めよ．

5. 半径 r, 高さ h の円筒内の領域を $\mathcal{V}$ とし，ベクトル場

$$\boldsymbol{f}(x,y,z) = \left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}, 0\right)$$

について体積分 $\displaystyle\iiint_{\mathcal{V}} \nabla\cdot\boldsymbol{f} d\mathcal{V}$ を求めよ．

6. $x^2+y^2=1$, $z=0$ で表される曲線を C とする．3 次元のベクトル場 $\boldsymbol{f}(x,y,z) = (2x+3y, 3x-5y, 0)$ について，ストークス定理を利用し，$\displaystyle\oint_C \boldsymbol{f}\cdot d\boldsymbol{c}$ を求めよ．

第 4 章

微分方程式

4.1 常微分方程式

常微分方程式

定義 25. 変数 x の関数 $f(x)$ とその導関数

$$\frac{df(x)}{dx}, \frac{d^2f(x)}{dx^2}, \frac{d^3f(x)}{dx^3}, \cdots$$

を含む関係式

$$g\left(x, f(x), \frac{df(x)}{dx}, \frac{d^2f(x)}{dx^2}, \cdots, \frac{d^nf(x)}{dx^n}\right) = 0$$

を $f(x)$ に関する**常微分方程式**という．また，常微分方程式での導関数の最高階が n であるとき，n **階の常微分方程式**という．

例 15. 放射性物質は質量に比例した量が崩壊していく．時刻 $t = 0$ での質量が q_0 で，各時刻での質量の α,$\alpha < 1$, 倍が崩壊する場合，時刻 t での質量 $q(t)$ を求めるには

$$\begin{cases} \dfrac{dq(t)}{dt} & = -\alpha q(t) \\ q(0) & = q_0 \end{cases}$$

を解けばよい.

例 16. 真空中で物体が静止状態から落下するとき，時刻 t と落下距離 $s(t)$ の関係は重力加速度を

g とすると，2 階の常微分方程式

$$\frac{d^2 s(t)}{dt^2} = g$$

で与えられる．

時刻 0 では静止状態だったので，初期条件は

$$s(0) = 0, \quad \frac{ds(t)}{dt} = 0$$

である．

例 17. 天井に鉛直につるしたバネの下端に質量 m のおもりをつけ，下に引っ張って離したあとのおもりの運動方程式を求めよ．ただし，バネの弾力定数は k で質量は無視できるものとする．

【回答】

おもりが静止した状態でバネが ℓ ぐらい伸びたとすると

$$mg = k\ell$$

となる．下方向を正の方向をするとニュートンの第 2 法則により

$$m\frac{d^2 f(t)}{dt^2} = mg - k(\ell + f(t))$$

が成り立ち，前の式を代入すると

$$m\frac{d^2 f(t)}{dt^2} + kf(t) = 0$$

が得られる．

例 18. インダクタンス L のコイルと抵抗 R が直列した回路での起電力 E_0 をした場合，スイッチを閉じた後の回路の電流の方程式を導けよ．

【回答】

時刻 t での電流を $I(t)$ とおくと，インダクタンスと抵抗での電圧はそれぞれ $L\dfrac{dI(t)}{dt}$ と $RI(t)$ である．従って電流は

$$E_0 = RI(t) + L\frac{I(t)}{dt}$$

を満たさなければならない．スイッチを閉じる瞬間を $t=0$ とすると初期条件は

$$I(0)=0$$

となる．

4.2 偏微分方程式

偏微分方程式

定義 26. 二つ以上の変数 $x,\ y,\ \cdots$ とその関数 $f(x,y,\cdots)$ 及び関数の導関数

$$\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \cdots, \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}, \cdots, \frac{\partial^n f}{\partial x^n}, \frac{\partial^n f}{\partial x^{n-1} \partial y}, \cdots$$

を含む関係式

$$g\left(x, y, \cdots, f, \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \cdots, \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}, \cdots, \frac{\partial^n f}{\partial x^n}, \frac{\partial^n f}{\partial x^{n-1} \partial y}, \cdots\right)=0$$

を f に関する**偏微分方程式**という．また，偏微分方程式での偏導関数の最高階が n であるとき，n **階の偏微分方程式**という．

例 19. x 軸の 0 と ℓ 点に張った弦に時刻 $t=0$ で y 軸の方向に少変位 $f(x,0)=y_0$ を与えはなしたとき，弦の運動が満たす方程式 $f(x,t)$ を導け．
【回答】
弦の密度を ρ とすれば，少変異の場合質量は

$$\Delta m=\rho\sqrt{1+\left(\frac{\partial f(x,t)}{\partial x}\right)^2}\Delta x \approx \rho \Delta x$$

で近似できる．
弦の張力を T とすると，座標 x と $x+\Delta x$ で働く力の y 軸成分はそれぞれ　$-T\sin\theta$ と $T\sin\theta'$ であるので，ニュートンの第二法則により

$$\Delta m \frac{\partial^2 f(x,t)}{\partial t^2}=T(\sin\theta'-\sin\theta)$$

となるので

$$\rho \frac{\partial^2 f(x,t)}{\partial t^2}=\frac{T(\sin\theta'-\sin\theta)}{\Delta x}$$

が成り立つ．

ここで，θ と θ' が小さい場合

$$\sin\theta \approx \tan\theta = \frac{\partial f(x,t)}{\partial x}$$
$$\sin\theta' \approx \tan\theta' = \frac{\partial f(x+\Delta x,t)}{\partial x}$$

となるので

$$\frac{\partial^2 f(x,t)}{\partial t^2} = \frac{T}{\rho}\frac{\partial^2 f(x,t)}{\partial x^2}$$

が得られる．
両端を固定しているので

$$f(0,t) = f(\ell,t) = 0$$

で，初期変位の条件より

$$f(x,0) = y_0, \quad \frac{\partial f(x,0)}{\partial t} = 0$$

となる．

例 20. 電場の強度を $\boldsymbol{E}(t)$, 磁束密度を $\boldsymbol{B}(t)$, 電束密度を $\boldsymbol{D}(t)$, 磁場の強度を $\boldsymbol{H}(t)$ とし, Maxwell の方程式を考える．
式 (4.1) と (4.2) は，閉じた曲面 $\mathbb{S}$ に囲まれた領域を $\mathcal{V}$ とすると，領域 $\mathcal{V}$ からでていく電束密度 $\boldsymbol{D}(t)$ と磁束密度の総和が内部電荷密度 ρ の総和および零と等しいことを表す．

$$\iint_{\mathbb{S}} \boldsymbol{D}(t)\cdot d\boldsymbol{S} = \iiint_{\mathcal{V}} \rho dxdydz \tag{4.1}$$
$$\iint_{\mathbb{S}} \boldsymbol{B}(t)\cdot d\boldsymbol{S} = 0 \tag{4.2}$$

この二つの式にガウスの発散定理を適応すると

$$\iiint_{\mathcal{V}} (\nabla\cdot\boldsymbol{D}(t) - \rho) dxdydz = 0$$
$$\iiint_{\mathcal{V}} \nabla\cdot\boldsymbol{B}(t) dxdydz = 0$$

より，微分形式

$$\nabla\cdot\boldsymbol{D}(t) = \rho$$
$$\nabla\cdot\boldsymbol{B}(t) = 0$$

が得られる．
一方，式 (4.3) と (4.4) は，曲面 $\mathbb{S}$ を縁どる閉じた曲線 C に沿った磁場の積分は，その面を通過す

る電流密度と電束密度の時間変動の和，電場の場合には磁束の変動の和に等しいことを表す.

$$\oint_C \boldsymbol{H}(t) \cdot d\boldsymbol{c} = \iint_{\mathbb{S}} \left(\boldsymbol{i}(t) + \frac{\partial \boldsymbol{D}(t)}{\partial t} \right) \cdot d\boldsymbol{S} \tag{4.3}$$

$$\oint_C \boldsymbol{E}(t) \cdot d\boldsymbol{c} = - \iint_{\mathbb{S}} \frac{\partial \boldsymbol{B}(t)}{\partial t} \cdot d\boldsymbol{S} \tag{4.4}$$

この二つの式にストークス定理を適応すると

$$\iint_{\mathbb{S}} \left(\nabla \times \boldsymbol{H}(t) - \boldsymbol{i}(t) - \frac{\partial \boldsymbol{D}(t)}{\partial t} \right) \cdot d\boldsymbol{S} = 0$$

$$\iint_{\mathbb{S}} \left(\nabla \times \boldsymbol{E}(t) + \frac{\partial \boldsymbol{B}(t)}{\partial t} \right) \cdot d\boldsymbol{S} = 0$$

より，微分形式

$$\nabla \times \boldsymbol{H}(t) = \boldsymbol{i}(t) + \frac{\partial \boldsymbol{D}(t)}{\partial t}$$

$$\nabla \times \boldsymbol{E}(t) = - \frac{\partial \boldsymbol{B}(t)}{\partial t}$$

を得る.

常微分方程式と偏微分法定式を合わせて**微分方程式**というが，微分方程式を満たす関数をその微分方程式の**解**という.

第 5 章

常微分方程式

5.1 一階常微分方程式

変数 x のみの関数を $g(x)$，$f(x)$ の関数を $h\left(f(x)\right)$ とし，α, β で定数をで表す．

5.1.1 変数分離形

変数分離形

定義 27. 変数 x, 関数 $f(x)$ およびその導関数 $\dfrac{df(x)}{dx}$ の関係式が

$$\frac{df(x)}{dx} = g(x)h\left(f(x)\right) \tag{5.1}$$

の形で表せる微分方程式を**変数分離形**という．

【解法】

式 (5.1) を

$$\frac{1}{h\left(f(x)\right)}df(x) = g(x)dx$$

の形に変形し，$y = f(x)$ として両辺を積分すると

$$\int \frac{1}{h(y)}dy = \int g(x)dx + \alpha$$

が一般解となる．$y = f(x)$ なので，$f(x)$ に関する関係式が得られ，初期条件から α を求め，特殊解を得る．

例 21. 例 15 の方程式を

$$\frac{1}{q(t)}dq(t) = -\alpha dt$$

と書き，両辺を積分すると

$$\ln|q(t)| = -\alpha t + \alpha_0$$

となるが，題意により $q(t) \geq 0$ となるので，一般解は

$$q(t) = e^{-\alpha t + \alpha_0}$$

である．初期条件により，$e^{\alpha_0} = q_0$ となるので，解は $q(t) = q_0 e^{-\alpha t}$ である．

5.1.2 同次形

同次形

定義 28. 関係式が

$$\frac{df(x)}{dx} = h\left(\frac{f(x)}{x}\right)$$

で表される微分方程式を**同次形**という．

【解法】

$u(x) = \dfrac{f(x)}{x}$ とおくと，$f(x) = u(x)x$ より，$df(x) = xdu(x) + u(x)dx$ となるので，関係式は

$$\frac{du(x)}{h\left(u(x)\right) - u(x)} = \frac{dx}{x}$$

と変数分離形で書ける．変数分離形の解法により

$$\int \frac{du(x)}{h\left(u(x)\right) - u(x)} = \ln|x| + \alpha$$

が得られ，一般解は

$$x = \pm\alpha e^{\int \frac{du(x)}{h(u(x)) - u(x)}}$$

で与えられる．

例 22. 方程式

$$\frac{df(x)}{dx} = \frac{f^2(x)}{x^2 + xf(x)}$$

は

$$\frac{df(x)}{dx} = \frac{\left(\frac{f(x)}{x}\right)^2}{1+\left(\frac{f(x)}{x}\right)}$$

と書けるので，同次形である．$f(x) = xu(x)$ とおけば

$$x\frac{du(x)}{dx} = \frac{-u(x)}{1+u(x)}$$

したがって

$$\left(1+\frac{1}{u(x)}\right)du(x) + \frac{dx}{x} = 0$$

より

$$u(x) + \ln|u(x)| + \ln|x| = \alpha$$

であるため，一般解は

$$\frac{f(x)}{x} + \ln\frac{|f(x)|}{|x|} + \ln|x| = \alpha$$
$$\Leftrightarrow f(x) + x\ln|f(x)| = \alpha x$$

を満たす．

5.1.3　線形微分方程式

線形微分方程式

定義 29. $\frac{df(x)}{dx}$ が $f(x)$ の一次で関係式

$$\frac{df(x)}{dx} = g_0(x)f(x) + g(x)$$

が与えられる微分方程式を **1 階線形微分方程式**という．$g(x) = 0$ のとき，**同次方程式**といい，$g(x) \neq 0$ のときは**非同次方程式**と呼ぶ．

同次方程式は

$$\frac{df(x)}{f(x)} = g_0(x)dx$$

の形式に変形すると，変数分離形の方程式となるので，以下非同次方程式の二つの解法について説明する．

【積分因子による解法】

関係式の両辺に $a(x)$ を乗算すると

$$\frac{df(x)}{dx}a(x) = a(x)g_0(x)f(x) + a(x)g(x)$$

となるので，変形して

$$a(x)g(x) = \frac{df(x)}{dx}a(x) - g_0(x)a(x)f(x)$$

が得られる．

　一方，二つの関数の積の微分は

$$\frac{df(x)a(x)}{dx} = \frac{df(x)}{dx}a(x) + \frac{da(x)}{dx}f(x)$$

であることより，与えた $a(x)$ が

$$\frac{da(x)}{dx} + g_0(x)a(x) = 0 \tag{5.2}$$

を満たせば，$f(x)$ は

$$\frac{df(x)a(x)}{dx} = a(x)g(x) \tag{5.3}$$

を解くことで求められる．

　式 (5.2) を満たす $a(x)$ の一般解は

$$\int \frac{da(x)}{a(x)} + g_0(x)dx = 0$$

より

$$a(x) = \alpha e^{-\int g_0(x)dx}$$

で与えられるので，式 (5.3) を満たす一般解は

$$f(x) = e^{\int g_0(x)dx}\left[\int e^{-\int g_0(x)dx}g(x)dx + \beta\right]$$

で表される．

微分因子

定義 30. $a(x)$ のような微分方程式にかけると，関係式がある関数の微分の形になるような関数を**微分因子**という．

例 23.

$$\frac{df(x)}{dx} = xf(x) + x^2$$

の一般解について考える．

両辺に $a(x)$ を乗算すると

$$a(x)\frac{df(x)}{dx} - xa(x)f(x) = x^2a(x)$$

であるので

$$\frac{da(x)}{dx} = -xa(x)$$

を満たす関数

$$a(x) = \alpha e^{-\frac{x^2}{2}}$$

に対して

$$\frac{df(x)a(x)}{dx} = x^2 a(x)$$

が成り立つ．故に $f(x)$ の一般解は

$$\begin{aligned} f(x) &= e^{\frac{x^2}{2}} \left(\int e^{-\frac{x^2}{2}} x^2 dx + \beta \right) \\ &= e^{\frac{x^2}{2}} \left(- \int x d e^{-\frac{x^2}{2}} + \beta \right) \\ &= e^{\frac{x^2}{2}} \int e^{-\frac{x^2}{2}} dx - x + \beta e^{\frac{x^2}{2}} \end{aligned}$$

である．

【定数変化法による解法】

変数分離形の解法を用いると，同次方程式

$$\frac{df(x)}{f(x)} = g_0(x)dx$$

の一般解は

$$f(x) = \alpha e^{\int g_0(x)dx}$$

で与えられる．次に，α を定数から x の関数とみなすと

$$\begin{aligned} \frac{df(x)}{dx} &= \frac{d\alpha(x)}{dx} e^{\int g_0(x)dx} + g_0(x)\alpha(x) e^{\int g_0(x)dx} \\ &= g_0(x)f(x) + \frac{d\alpha(x)}{dx} e^{\int g_0(x)dx} \end{aligned}$$

となるので，$\alpha(x)$ を

$$\frac{d\alpha(x)}{dx} e^{\int g_0(x)dx} = g(x)$$

を満たすように

$$\alpha(x) = \int e^{-\int g_0(x)dx} g(x)dx + \beta$$

と設定すると，一般解は

$$f(x) = e^{\int g_0(x)dx} \left[\int e^{-\int g_0(x)dx} g(x)dx + \beta \right]$$

で表される．

定数変化法

定義 31. 同次方程式の解での定数を関数とみなして，非同次方程式の解を求める方法を**定数変化法**という．

例 24. 上の例での一般解を定数変化法で求めると，まず

$$\frac{df(x)}{dx} = xf(x)$$

より，同次方程式の一般解

$$f(x) = \alpha e^{\frac{x^2}{2}}$$

を得る．次に

$$f(x) = \alpha(x)e^{\frac{x^2}{2}}$$

とおくと

$$\begin{aligned}\frac{df(x)}{dx} &= \alpha(x)xe^{\frac{x^2}{2}} + \frac{d\alpha(x)}{dx}e^{\frac{x^2}{2}} \\ &= xf(x) + \frac{d\alpha(x)}{dx}e^{\frac{x^2}{2}}\end{aligned}$$

であるので

$$\begin{aligned}\alpha(x) &= \int x^2 e^{-\frac{x^2}{2}}dx + \beta \\ &= \int e^{-\frac{x^2}{2}}dx - xe^{-\frac{x^2}{2}} + \beta\end{aligned}$$

となる．
従って，一般解は

$$f(x) = e^{\frac{x^2}{2}}\int e^{-\frac{x^2}{2}}dx - x + \beta e^{\frac{x^2}{2}}$$

で表される．

5.2 二階常微分方程式

二階線形微分方程式

定義 32. x のみの関数 $g_0(x)$,$g_1(x)$ 及び $g(x)$ が与えられたとき

$$\frac{d^2f(x)}{dx^2}+g_1(x)\frac{df(x)}{dx}+g_0(x)f(x)=g(x) \tag{5.4}$$

の形式の微分方程式を **2 階線形微分方程式**と呼ぶ．$g(x)=0$ のとき，**同次方程式**といい，$g(x)\neq 0$ のときには，**非同次方程式**という．

定理 3. $g(x)$, $g_0(x)$, $g_1(x)$ が区間 $\mathbb{X}$ で連続であるとき，区間内の点 $x=a$ における初期条件

$$f(x)|_{x=a}=b_0,\ \left.\frac{df(x)}{dx}\right|_{x=a}=b_1$$

のもとで，2 階線形微分方程式 (5.4) の解は区間 $\mathbb{X}$ でただ 1 つ存在する．

証明略

5.2.1 二階線形微分方程式の解

ロンスキャン

定義 33. 2 つの関数 $f_1(x)$,$f_2(x)$ に対して

$$W[f_1(x),f_2(x)]=\det\begin{pmatrix} f_1(x) & f_2(x) \\ \frac{df_1(x)}{dx} & \frac{df_2(x)}{dx}\end{pmatrix}$$

を**ロンスキャン**という．

【性質】

$f_1(x)$,$f_2(x)$ が一次従属[*1]$\Rightarrow W[f_1(x),f_2(x)]=0$．ただし，逆は成り立たない．

【証明】

同時に 0 とならない α_1,α_2 に対して

$$\alpha_1 f_1(x)+\alpha_2 f_2(x)=0 \tag{5.5}$$

$$\alpha_1\frac{df_1(x)}{dx}+\alpha_2\frac{df_2(x)}{dx}=0 \tag{5.6}$$

[*1] $\alpha_1 f_1(x)+\alpha_2 f_2(x)=0$ が恒等的に成り立つ $\Rightarrow \alpha_1=\alpha_2=0$ であれば，$f_1(x)$ と $f_2(x)$ は**一次独立**であるといい，一次独立でない場合は**一次従属**という．

が成り立つ．$\alpha_1 \neq 0$ とすると，(5.5) に $\dfrac{df_2(x)}{dx}$，(5.6) に $f_2(x)$ を掛けた項の差をとると

$$\alpha_1 \det \begin{pmatrix} f_1(x) & f_2(x) \\ \dfrac{df_1(x)}{dx} & \dfrac{df_2(x)}{dx} \end{pmatrix} = \alpha_1 W[f_1(x), f_2(x)] = 0$$

なので，ロンスキャンが 0 となる．同様に $\alpha_2 \neq 0$ のときもロンスキャンが 0 になることが示せる．

逆の場合は

$$f_1(x) = \begin{cases} x^2 & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}, \quad f_2(x) = \begin{cases} 0 & x \geq 0 \\ x^2 & x < 0 \end{cases}$$

とおくと，$W[f_1(x), f_2(x)] = 0$ であるが，$f_1(x)$ と $f_2(x)$ は独立である．

定理 4. 二階線形同次微分方程式の解空間 $\mathbb{F}$ において，任意の 2 つの関数 $f_1(x), f_2(x) \in \mathbb{F}$ の線型結合

$$f(x) = \alpha_1 f_1(x) + \alpha_2 f_2(x), \quad \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$$

も $\mathbb{F}$ の関数である．また，$\mathbb{F}$ には線形独立な 2 つの関数 $f_1(x)$, $f_2(x)$ が存在し，$\mathbb{F}$ の任意の関数は $f_1(x)$ と $f_2(x)$ の線型結合

$$f(x) = \alpha_1 f_1(x) + \alpha_2 f_2(x)$$

でただ 1 通りに表される．

【証明】

- 一次結合が解

  同次微分方程式を $h(f(x)) = 0$ と表した場合，線形微分方程式に対して

  $$h(f(x)) = h\left(\alpha_1 f_1(x) + \alpha_2 f_2(x)\right) = \alpha_1 h\left(f_1(x)\right) + \alpha_2 h\left(f_2(x)\right)$$

  が成り立つ．$f_1(x)$, $f_2(x)$ が線形同次微分方程式の解なので，上の式は 0 であり，$f(x)$ も解となる．
- 独立解の存在

  定理 3 より，与えられた初期条件のもとで解はただ 1 つ存在するので，区間 $\mathbb{X}$ 内の点 a に対して

  $f_1(x)$: $f(x)|_{x=a} = 1, \left.\dfrac{df(x)}{dx}\right|_{x=a} = 0$ の解

  $f_2(x)$: $f(x)|_{x=a} = 0, \left.\dfrac{df(x)}{dx}\right|_{x=a} = 1$ の解

  とおくと，$W[f_1(x), f_2(x)]_{x=a} = 1 \neq 0$ より $f_1(x)$ と $f_2(x)$ は一次独立である．
- $\mathbb{F}$ の任意の関数 $f(x)$ の $x = a$ での初期値を

  $$f(x)|_{x=a} = \alpha_1, \quad \left.\frac{df(x)}{dx}\right|_{x=a} = \alpha_2$$

  とし

  $$g(x) = \alpha_1 f_1(x) + \alpha_2 f_2(x)$$

  及び $g(x)$ の微分の $x = a$ での値を調べると

  $$g(x)|_{x=a} = \alpha_1 f_1(x)|_{x=a} + \alpha_2 f_2(x)|_{x=a} = \alpha_1$$

$$\left.\frac{dg(x)}{dx}\right|_{x=a} = \alpha_1 \left.\frac{df_1(x)}{dx}\right|_{x=a} + \alpha_2 \left.\frac{df_2(x)}{dx}\right|_{x=a} = \alpha_2$$

なので $g(x) = f(x)$ である．従って，$\mathbb{F}$ の任意の関数はある定数 α_1,α_2 を用いて

$$f(x) = \alpha_1 f_1(x) + \alpha_2 f_2(x)$$

と書ける．

- 一意性

$$\begin{cases} f(x) & = \alpha_1 f_1(x) + \alpha_2 f_2(x) \\ f(x) & = \beta_1 f_1(x) + \beta_2 f_2(x) \end{cases}$$

で表されるなら

$$(\alpha_1 - \beta_1) f_1(x) + (\alpha_2 - \beta_2) f_2(x) = 0$$

より $\alpha_1 = \beta_1$ かつ $\alpha_2 = \beta_2$ でないと，$f_1(x)$ と $f_2(x)$ は一次従属になる．

定理 5. 非同次方程式の１つの特殊解を $v(x)$ とするとき，二階非同次線形微分方程式の任意の解は同次方程式の基本解 $f_1(x)$, $f_2(x)$ を用いて

$$f(x) = \alpha f_1(x) + \alpha_2 f_2(x) + v(x)$$

で表せる．

【証明】

$g(x) = f(x) - v(x)$ とおくと，$g(x)$ は同次方程式の解となる．従って，非同次方程式の解は上の式で表せる．

5.2.2　二階定係数線形同次微分方程式

二階の線形同次微分方程式のうち，係数が定数となる

$$\frac{d^2 f(x)}{dx^2} + c_1 \frac{df(x)}{dx} + c_0 f(x) = 0 \tag{5.7}$$

の形の微分方程式について考える．

$f(x) = e^{\lambda x}$ とした場合，$\dfrac{df(x)}{dx} = \lambda e^{\lambda x}$, $\dfrac{d^2 f(x)}{dx^2} = \lambda^2 e^{\lambda x}$ となるので，(5.7) は

$$\left(\lambda^2 + c_1 \lambda + c_0\right) e^{\lambda x} = 0$$

となる．$e^{\lambda x} \neq 0$ より次の方程式が，(5.7) の解を求める鍵となる．

特性方程式

定義 34. (5.7) で与えられた二階同次微分方程式にたいして

$$\lambda^2 + c_1 \lambda + c_0 = 0$$

を微分方程式の**特性方程式**とよぶ．

$$\rho = \frac{c_1}{2}, \quad \omega = \frac{\sqrt{|c_1^2 - 4c_0|}}{2}$$

特性方程式の解の形式によって，次の三種類が考えられる．

1. $c_1^2 - 4c_0 > 0$ の場合
   特性方程式は 2 つの異なる実数解
   $$\lambda_{1,2} = -\rho \pm \omega$$
   を持つので，微分方程式の基本解は
   $$f_1(x) = e^{-(\rho-\omega)x}, f_2(x) = e^{-(\rho+\omega)x}$$
   一般解は
   $$f(x) = \alpha_1 f_1(x) + \alpha_2 f_2(x) = \alpha_1 e^{-(\rho-\omega)x} + \alpha_2 e^{-(\rho+\omega)x}$$
   で表される．
2. $c_1^2 - 4c_0 = 0$ の場合
   特性方程式は重解 $\lambda_1 = \lambda_2 = -\rho$ を持つので
   $$f_1(x) = e^{-\rho x}$$
   は微分方程式の 1 つの解である．
   一次独立な他の解は，定数変化法を用いて計算する．$\alpha e^{-\rho x}$ が解なので
   $$f_2(x) = \alpha(x) e^{-\rho x}$$
   とし，微分
   $$\begin{aligned} \frac{df_2(x)}{dx} &= \left[\frac{d\alpha(x)}{dx} - \rho\alpha(x)\right] e^{-\rho x} \\ \frac{d^2 f_2(x)}{dx^2} &= \left[\frac{d^2\alpha(x)}{dx^2} - 2\rho\frac{d\alpha(x)}{dx} + \rho^2\alpha(x)\right] e^{-\rho x} \end{aligned}$$
   を (5.7) に代入すると
   $$\left[\frac{d^2\alpha(x)}{dx^2} + (c_1 - 2\rho)\frac{d\alpha(x)}{dx} + (\rho^2 - c_1\rho + c_0)\alpha(x)\right] e^{-\rho x} = 0$$
   ここで $-\rho = -\frac{c_1}{2}$ は特性方程式の重解なので $2\rho = c_1$ および $\rho^2 - c_1\rho + c_0 = 0$ が成り立ち，上の式は
   $$\frac{d^2\alpha(x)}{dx^2} e^{-\rho x} = 0$$
   となる．故に $\alpha(x) = \beta_1 x + \beta_0$ となり，$\alpha(x) = x$ とし
   $$f_2(x) = x e^{-\rho x}$$
   とおくと
   $$W[f_1(x), f_2(x)] = e^{-2\rho x}$$

より $f_1(x)$ とは一次独立な解となる．従って，一般解は

$$f(x) = \alpha_1 f_1(x) + \alpha_2 f_2(x) = \alpha_1 e^{-\rho x} + \alpha_2 x e^{-\rho x}$$

で表される．

3. $c_1^2 - 4c_0 < 0$ の場合
特性方程式は 2 つの異なる複素数解

$$\lambda_{1,2} = -\rho \pm j\omega$$

を持つので，微分方程式の基本解は

$$g_{1,2}(x) = e^{-\rho \pm j\omega} = e^{-\rho x}\left(\cos\omega x \pm j \sin\omega x\right)$$

で表されるが，その一次結合

$$f_1(x) = \frac{g_1(x) + g_2(x)}{2} = e^{-\rho x}\cos\omega x$$
$$f_2(x) = \frac{g_1(x) - g_2(x)}{2j} = e^{-\rho x}\sin\omega x$$

を用いて一般解を

$$f(x) = \alpha_1 f_1(x) + \alpha_2 f_2(x) = e^{-\rho x}\left(\alpha_1 \cos\omega x + \alpha_2 \sin\omega x\right)$$

で表すと簡潔である．

例 25. 抵抗 R，コイル L およびコンデンサー C が直列連結された回路にかかる電圧を $E(t)$ とすると，回路に流れる電流 $I(t)$ は

$$L\frac{dI(t)}{dt} + RI(t) + \frac{1}{C}\int_{t_0}^{t} I(\tau)d\tau = E(t)$$

が成り立つので，両辺を微分して

$$L\frac{d^2I(t)}{dt^2} + R\frac{dI(t)}{t} + \frac{1}{C}I(t) = \frac{dE(t)}{dt}$$

が得られる．
時刻 $t = 0$ において，電源を外し RLC 閉回路での電流 $I(t)$ の変化を

$$\frac{d^2I(t)}{dt^2} + \frac{R}{L}\frac{dI(t)}{t} + \frac{1}{LC}I(t) = 0$$

に基づいて考えると，特性方程式は

$$\lambda^2 + \frac{R}{L}\lambda + \frac{1}{LC} = 0$$

となるので

$$\rho = \frac{R}{2L}, \quad \omega = \frac{\sqrt{\left|R^2 - \frac{4L}{C}\right|}}{2L}$$

とし，次の場合に分けて議論する．

- $R^2 - \frac{4L}{C} > 0$ の場合（超過減衰）
  電流の一般解は
  $$I(t) = \alpha_1 e^{-(\rho+\omega)t} + \alpha_2 e^{-(\rho-\omega)t}$$
  で表され，振動せず減少する．
- $R^2 - \frac{4L}{C} = 0$ の場合（臨界減衰）
  電流の一般解は
  $$I(t) = (\alpha_1 + \alpha_2 t)\, e^{-\rho t}$$
  となり，超過減衰と類似した減衰特性となる．
- $R^2 - \frac{4L}{C} < 0$ の場合（振動減衰）
  一般解は
  $$I(t) = e^{-\rho x}\left(\alpha_1 \cos \omega x + \alpha_2 \sin \omega x\right)$$
  で表され，振動しながら減衰していく．
- $R = 0$ の場合（非減衰系）
  $\rho = 0$ なので
  $$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$
  とおくと，電流の一般式は
  $$I(t) = \alpha_1 \cos \omega_0 t + \alpha_2 \sin \omega_0 t$$
  の単振動に簡略化される．

5.2.3　二階定係数線形非同次微分方程式

二階の線形非同次微分方程式

$$\frac{d^2 f(x)}{dx^2} + c_1 \frac{df(x)}{dx} + c_0 f(x) = g(x) \tag{5.8}$$

解を求めるために，$g(x)$ と同じ形の式に係数をかけたものを特殊解と仮定して方程式を満足するように係数を決定する**未定係数法**を用いて解く．

式 (5.8) の同次微分方程式の特性方程式を

$$h(\lambda) = \lambda^2 + c_1 \lambda + c_0 = 0$$

とおき，以下の場合について考える．

1. $r(x) = \alpha e^{\rho x}$
   (a) ρ が特性方程式の解でない場合
   $$f(x) = \beta e^{\rho x}$$

とおくと

$$\frac{df(x)}{dx} = \beta\rho e^{\rho x}, \quad \frac{d^2f(x)}{dx^2} = \beta\rho^2 e^{\rho x}$$

を (5.8) に代入して

$$\frac{d^2f(x)}{dx^2} + c_1\frac{df(x)}{dx} + c_0 f(x) = \beta(\rho^2 + c_1\rho + c_0)e^{\rho x} = \beta h(\rho)e^{\rho x} = \alpha e^{\rho x}$$

を得る．ρ が特性方程式の解でない場合，$h(\rho) \neq 0$ であるので

$$\beta h(\rho) = \alpha$$

より

$$f(x) = \frac{\alpha e^{\rho x}}{h(\rho)}$$

を得る．

（b）ρ が特性方程式の解である場合

$$f(x) = \beta c(x)e^{\rho x}$$

とおくと

$$\begin{cases} \dfrac{df(x)}{dx} = \beta e^{\rho x}\left(\dfrac{dc(x)}{dx} + \rho c(x)\right) \\ \dfrac{d^2f(x)}{dx^2} = \beta e^{\rho x}\left(\dfrac{d^2c(x)}{dx^2} + 2\rho\dfrac{dc(x)}{dx} + \rho^2 c(x)\right) \end{cases}$$

を (5.8) に代入して

$$\beta\left[\frac{d^2c(x)}{dx^2} + (2\rho + c_1)\frac{dc(x)}{dx}\right] = \alpha$$

を得る．

i. ρ が $h(\lambda) = 0$ の重解でない場合

$$2\rho + c_1 \neq 0$$

となるので，例えば

$$c(x) = x$$

とおくと，特殊解は

$$f(x) = \frac{\alpha x e^{\rho x}}{2\rho + c_1}$$

となる．

ii. ρ が $h(\lambda) = 0$ の重解である場合

$2\rho + c_1 = 0$ から

$$\beta\frac{d^2f(x)}{dx^2} = \rho$$

より，例えば

$$c(x) = x^2$$

とおくと，特殊解は

$$f(x) = \frac{\alpha x^2 e^{\rho x}}{2}$$

と表せる．

2. $r(x) = \alpha \cos \omega x$ (もしくは $r(x) = \alpha \sin \omega x$)

(a) $c_1 = 0$ かつ $c_0 = \omega^2$ でない場合

$$f(x) = \alpha_1 \cos \omega x + \alpha_2 \sin \omega x \tag{5.9}$$

とおくと

$$\frac{df(x)}{dx} = -\alpha_1 \omega \sin \omega x + \alpha_2 \omega \cos \omega x, \quad \frac{d^2 f(x)}{dx^2} = -\alpha_1 \omega^2 \cos \omega x - \alpha_2 \omega^2 \sin \omega x$$

を (5.8) に代入して

$$\left[\alpha_1(c_0 - \omega^2) + \alpha_2 c_1 \omega\right] \cos \omega x + \left[\alpha_2(c_0 - \omega^2) - \alpha_1 c_1 \omega\right] \sin \omega x = \alpha \cos \omega x$$

を得る．両辺を比較して α_1 と α_2 に関する連立方程式

$$\begin{cases} \alpha_1(c_0 - \omega^2) + \alpha_2 c_1 \omega & = \alpha \\ \alpha_2(c_0 - \omega^2) - \alpha_1 c_1 \omega & = 0 \end{cases}$$

から求めた α_1 と α_2 を (5.9) に代入して解を得る．

(b) $c_1 = 0$ かつ $c_0 = \omega^2$ の場合

$$f(x) = \alpha_1 x \cos \omega x + \alpha_2 x \sin \omega x$$

とおくと

$$\begin{cases} \dfrac{df(x)}{dx} & = & (\alpha_1 + \alpha_2 \omega x) \cos \omega x + (\alpha_2 - \alpha_1 \omega x) \sin \omega x \\ \dfrac{d^2 f(x)}{dx^2} & = & 2\alpha_2 \omega \cos \omega x - 2\alpha_1 \omega \sin \omega x - \omega^2 f(x) \end{cases}$$

および $c_1 = 0$,$c_0 = \omega^2$ を (5.8) に代入して

$$2\alpha_2 \omega \cos \omega x - 2\alpha_1 \omega \sin \omega x = \alpha \cos \omega x$$

を得る．両辺を比較すると

$$\begin{cases} \alpha_1 & = 0 \\ \alpha_2 & = \dfrac{\alpha}{2\omega} \end{cases}$$

となるので，これらを (5.9) に代入して解を得る．

3. $r(x) = \beta_0 + \beta_1 x + \cdots + \beta_n x^n$

(a) $c_0 \neq 0$ の場合

$$f(x) = \alpha_0 + \alpha_1 x + \cdots + \alpha_n x^n$$

とおくと

$$\left\{\begin{array}{lcl}\dfrac{df(x)}{dx} & = & \alpha_1+2\alpha_2x+\cdots+n\alpha_nx^{n-1} \\ \dfrac{d^2f(x)}{dx^2} & = & 2\alpha_2+3\alpha_3\cdot 2x+\cdots+n\alpha_n\cdot(n-1)x^{n-2}\end{array}\right.$$

を (5.9) に代入して

$$\begin{aligned}&(2\alpha_2+c_1\alpha_1+c_0\alpha_0)+(3\alpha_3\cdot 2+c_12\alpha_2+c_0\alpha_1)x+(4\alpha_4\cdot 3+c_13\alpha_3+c_0\alpha_2)x^2+\cdots+\\ &[n\alpha_n\cdot(n-1)+c_1(n-1)\alpha_{n-1}+c_0\alpha_{n-2}]x^{n-2}+(c_1n\alpha_n+c_0\alpha_{n-1})x^{n-1}+c_0\alpha_nx^n\\ =&\ \beta_0+\beta_1x+\beta_2x^2+\cdots+\beta_{n-2}x^{n-2}+\beta_{n-1}x^{n-1}+\beta_nx^n\end{aligned}$$

を得る．$\boldsymbol{\alpha}=[\alpha_0,\alpha_1,\cdots,\alpha_n]^T$,$\boldsymbol{\beta}=[\beta_0,\beta_1,\cdots,\beta_n]^T$ とし

$$\boldsymbol{C}=\begin{bmatrix}c_0 & c_1 & 2 & & & & \\ & c_0 & 2c_1 & 2\cdot 3 & & & \\ & & c_0 & 3c_1 & 3\cdot 4 & & \\ & & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & & c_0 & (n-1)c_1 & (n-1)\cdot n \\ & & & & & c_0 & nc_1 \\ & & & & & & c_0\end{bmatrix}$$

とおくと，両辺を比較して

$$\boldsymbol{C\alpha}=\boldsymbol{\beta}$$

から $\boldsymbol{\alpha}$ を求める．

（b）$c_0=0$ の場合

$$f(x)=\alpha_0x+\alpha_1x^2+\cdots+\alpha_nx^{n+1}$$

とおくと

$$\left\{\begin{array}{lcl}\dfrac{df(x)}{dx} & = & \alpha_0+2\alpha_1x+3\alpha_2x^2+\cdots+(n+1)\alpha_nx^n \\ \dfrac{d^2f(x)}{dx^2} & = & 2\alpha_1+3\alpha_2\cdot 2x+\cdots+(n+1)\alpha_n\cdot nx^{n-1}\end{array}\right.$$

を (5.9) に代入して

$$\begin{aligned}&(2\alpha_1+c_1\alpha_0)+(3\alpha_2\cdot 2+c_12\alpha_1)x+(4\alpha_3\cdot 3+c_13\alpha_2)x^2+\cdots+\\ &[(n+1)\alpha_n\cdot n+c_1n\alpha_{n-1}]x^{n-1}+(c_1(n+1)\alpha_n)x^n\\ =&\ \beta_0+\beta_1x+\beta_2x^2+\cdots+\beta_{n-2}x^{n-2}+\beta_{n-1}x^{n-1}+\beta_nx^n\end{aligned}$$

を得る．$\boldsymbol{\alpha}=[\alpha_0,\alpha_1,\cdots,\alpha_n]^T$,$\boldsymbol{\beta}=[\beta_0,\beta_1,\cdots,\beta_n]^T$ とし

$$\boldsymbol{C}=\begin{bmatrix}c_1 & 2 & & & & \\ & 2c_1 & 2\cdot 3 & & & \\ & & 3c_1 & 3\cdot 4 & & \\ & & & \ddots & \ddots & \\ & & & & nc_1 & n\cdot(n+1) \\ & & & & & (n+1)dc_1\end{bmatrix}$$

とおくと，両辺を比較して

$$\boldsymbol{C\alpha} = \boldsymbol{\beta}$$

から $\boldsymbol{\alpha}$ を求める．

例 26. 微分方程式

$$\frac{d^2f(x)}{dx^2} - 5\frac{df(x)}{dx} + 6f(x) = g_0(x)$$

に対して，次の問に答えよ．

1. $g_0(x) = 10e^{-2x}$ の特殊解を求めよ．

2. $g_0(x) = 10e^{3x}$ の特殊解を求めよ．

3. $g_0(x) = 10\cos x$ の特殊解を求めよ．

4. $g_0(x) = 6x + 1$ の特殊解を求めよ．

【解】

与えられた微分方程式に対応する同次方程式の特性方程式

$$\lambda^2 - 5\lambda + 6 = 0$$

は 2 つの異なる実解 $\lambda_1 = 2,\ \lambda_2 = 3$ を持つ．

1. 指数関数の係数 -2 は，特性方程式のいずれの解とも異なるので，特殊解を

$$f(x) = \beta e^{-2x}$$

とおき

$$\frac{df(x)}{dx} = -2\beta e^{-2x}, \quad \frac{d^2f(x)}{dx^2} = 4\beta e^{-2x}$$

を与えられた方程式の右辺に代入すると

$$4\beta e^{-2x} + 10\beta e^{-2x} + 6\beta e^{-2x} = 20\beta e^{-2x}$$

となるので，右辺と比較して $\beta = \frac{1}{2}$ を得る．したがって，特殊解は

$$f(x) = \frac{1}{2}e^{-2x}$$

である．

2. 指数関数の係数 3 は，対応する同次方程式の特性方程式の実解の 1 つと一致するので，特殊解を

$$f(x) = \beta x e^{3x}$$

とおいて

$$\frac{df(x)}{dx} = \beta e^{3x} + 3\beta x e^{3x}, \quad \frac{d^2f(x)}{dx^2} = 6\beta e^{3x} + 9\beta x e^{3x}$$

を得る．これらを与えられた方程式に代入すると

$$\beta e^{3x} = 10e^{3x}$$

となるので，特殊解は

$$f(x) = 10xe^{3x}$$

である．

3. $\omega = 1$ は対応する同次方程式の特性方程式の解ではないので，特殊解を

$$f(x) = \alpha_1 \cos x + \alpha_2 \sin x$$

とおいて

$$\frac{df(x)}{dx} = -\alpha_1 \sin x + \alpha_2 \cos x, \quad \frac{d^2 f(x)}{dx^2} = -\alpha_1 \cos x - \alpha_2 \sin x$$

を方程式の左辺に代入して

$$5(\alpha_1 - \alpha_2)\cos x + 5(\alpha_1 + \alpha_2)\sin x = 10\cos x$$

を得る．両辺を比較して $\alpha_1 = 1$ と $\alpha_2 = -1$ となるので特殊解は

$$f(x) = \cos x - \sin x$$

で表せる．

4. $c_0 \neq 0$ であるので

$$f(x) = \alpha_0 + \alpha_1 x$$

とおいて

$$\frac{df(x)}{dx} = \alpha_1, \quad \frac{d^2 f(x)}{dx^2} = 0$$

を方程式の左辺に代入して

$$(6\alpha_0 - 5\alpha_1) + 6\alpha_1 x = 1 + 6x$$

を得る．両辺を比較して $\alpha_1 = 1$ と $\alpha_0 = 1$ となるので特殊解は

$$f(x) = x + 1$$

である．

演習問題

1. 積分因子法および定数変化法を用いて微分方程式

$$x\frac{df(x)}{dx}+f(x)+x(x^2-1)=0$$

を解け．

2. 定数 c に対して区間 $[a,b]$ において，$f(x)=0$ 以外に，微分方程式

$$\left\{\begin{array}{lcl}\dfrac{d^2f(x)}{dx^2}+cf(x) & = & 0\\ f(a)=f(b) & = & 0\end{array}\right.$$

を満たす関数が存在する必要十分条件は

$$c=\left(\frac{m\pi}{b-a}\right)^2$$

(m は正の整数) であることを示せ．

3. 次の微分方程式を解け．

(a) $6\dfrac{d^2f(x)}{dx^2}+\dfrac{df(x)}{dx}-f(x)=0,\quad f(x)\big|_{x=0}=-2,\ \dfrac{df(x)}{dx}\bigg|_{x=0}=-4$

(b) $4\dfrac{d^2f(x)}{dx^2}-4\dfrac{df(x)}{dx}+f(x)=0,\quad f(x)\big|_{x=0}=1,\ \dfrac{df(x)}{dx}\bigg|_{x=0}=0$

(c) $16\dfrac{d^2f(x)}{dx^2}+f(x)=0,\quad f(x)\big|_{x=\pi}=\sqrt{2},\ \dfrac{df(x)}{dx}\bigg|_{x=0}=1$

第 6 章

偏微分方程式

6.1 二階線形偏微分方程式

変数 x と y の関数を $g_{xx}(x,y)$，$g_{xy}(x,y)$,$g_{yy}(x,y)$,$g_x(x,y)$,$g_y(x,y)$,$g_0(x,y)$,$g(x,y)$ とし，α, β で定数を表す.

二階線形偏微分方程式

定義 35. 変数 x,y, 関数 $f(x,y)$ および二階までの導関数の関係式が

$$\begin{aligned}\mathscr{L}_2[f(x,y)] := g_{xx}(x,y)\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x^2} + g_{xy}(x,y)\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x \partial y} + \cdots \\ + g_x(x,y)\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} + g_y(x,y)\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} + \cdots \\ + g_0(x,y)f(x,y) = g(x,y)\end{aligned} \tag{6.1}$$

の形で表せる微分方程式を**二階線形偏微分方程式**という．$g(x,y)=0$ のとき，**同次**であるといい，$g(x,y)\neq 0$ のときは**非同次**という．$\mathscr{L}_2$ は表記の簡略化のために導入した**二階の線形偏微分演算子**である.

【性質】

$f_1(x,y)$ と $f_2(x,y)$ を二階の線形同次偏微分方程式の解とすると，任意の定数 α_1,α_2 に対して

$$\mathscr{L}_2\left[\alpha_1 f_1(x,y) + \alpha_2 f_2(x,y)\right] = \alpha_1 \mathscr{L}_2\left[f_1(x,y)\right] + \alpha_2 \mathscr{L}_2\left[f_2(x,y)\right] = 0$$

が成り立ち，任意の２つの解の一次結合も解となる.

【分類】

二階線形偏微分方程式の一般解の性質は, 二階導関数の係数 $g_{xx}(x,y), g_{xy}(x,y)$ 及び $g_{yy}(x,y)$ によって決定され, $\gamma := g_{xy}^2(x,y) - 4g_{xx}(x,y)g_{yy}(x,y)$ によって以下のように分類される.

- 双曲型 ($\gamma > 0$)
  波動方程式
  $$\frac{\partial^2 f(x,t)}{\partial t^2} - c^2\frac{\partial^2 f(x,t)}{\partial x^2} = 0 \tag{6.2}$$
- 放物面型 ($\gamma = 0$)

拡散方程式

$$\frac{\partial f(x,t)}{\partial t} - c^2 \frac{\partial^2 f(x,t)}{\partial x^2} = 0 \tag{6.3}$$

- 楕円型 ($\gamma < 0$)
  二次元ラプラス方程式

$$\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y^2} = 0 \tag{6.4}$$

6.2 波動方程式の解

波動方程式 (6.2) を変数分離法を用いて解くために解を

$$f(x,t) = f_x(x) f_t(t)$$

と仮定する．

各偏微分を計算すると

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \dfrac{\partial f(x,t)}{\partial x} & = & \dfrac{df_x(x)}{dx} f_t(t) \text{ and } \dfrac{\partial^2 f(x,t)}{\partial x^2} = \dfrac{d^2 f_x(x)}{dx^2} f_t(t) \\ \dfrac{\partial f(x,t)}{\partial t} & = & \dfrac{df_t(t)}{dt} f_x(x) \text{ and } \dfrac{\partial^2 f(x,t)}{\partial t^2} = \dfrac{d^2 f_t(t)}{dt^2} f_x(x) \end{array} \right.$$

となるので，(6.2) は

$$f_x(x) \frac{d^2 f_t(t)}{dt^2} = c^2 \frac{d^2 f_x(x)}{dx^2} f_t(t) \Leftrightarrow \frac{1}{c^2} \frac{1}{f_t(t)} \frac{d^2 f_t(t)}{dt^2} = \frac{1}{f_x(x)} \frac{d^2 f_x(x)}{dx^2} \tag{6.5}$$

すべての x と t に等式が成り立つためには，(6.5) が定数になる必要があるので，その値を $-\mu$ とおき，2 つの常微分方程式

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \dfrac{d^2 f_x(x)}{dx^2} + \mu f_x(x) & = & 0 \\ \dfrac{d^2 f_t(t)}{dt^2} + c^2 \mu f_t(t) & = & 0 \end{array} \right. \tag{6.6}$$

を得る．その特性方程式は

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \lambda^2 + \mu & = & 0 \\ \lambda^2 + c^2 \mu & = & 0 \end{array} \right.$$

となり，$\omega = \sqrt{|\mu|}$ とおくとそれぞれの一般解は

- $\mu > 0$ のとき

$$\left\{ \begin{array}{rcl} f_x(x) & = & \alpha_1 \cos \omega x + \alpha_2 \sin \omega x \\ f_t(t) & = & \beta_1 \cos c\omega t + \beta_2 \sin c\omega t \end{array} \right. \tag{6.7}$$

- $\mu = 0$ のとき

$$\left\{ \begin{array}{rcl} f_x(x) & = & \alpha_1 x + \alpha_2 \\ f_t(t) & = & \beta_1 t + \beta_2 \end{array} \right.$$

- $\mu < 0$ のとき

$$\begin{cases} f_x(x) &= \alpha_1 e^{\omega x} + \alpha_2 e^{-\omega x} \\ f_t(t) &= \beta_2 e^{c\omega t} + \beta_2 e^{-c\omega t} \end{cases}$$

従って，任意の正の定数 ω にたいして，一般解は

$$f(x,t) = \begin{cases} (\alpha_1 \cos\omega x + \alpha_2 \sin\omega x)(\beta_1 \cos c\omega t + \beta_2 \sin c\omega t) \\ (\alpha_1 x + \alpha_2)(\beta_1 t + \beta_2) \\ (\alpha_1 e^{\omega x} + \alpha_2 e^{-\omega x})(\beta_1 e^{c\omega t} + \beta_2 e^{-c\omega t}) \end{cases}$$

で表せる．

例 27. 両端を固定した長さ L の弦の動きを $f(x,t)$ とすると，微分方程式 (6.2) と境界条件

$$f(0,t) = f(L,t) = 0$$

を満たす．変数分離法を用いて計算すると，(6.6) での $f(x)$ に関する方程式は (第五章演習問題 2 参照)

$$\mu = \left(\frac{m\pi}{L}\right)^2$$

のときのみ，$f(x) = 0$ でない解を持つ．故に，一般式は

$$f(x,t) = \sum_{m=1}^{\infty} \sin\frac{m\pi x}{L}\left(\beta_{1,m}\cos\frac{m\pi ct}{L} + \beta_{2,m}\sin\frac{m\pi ct}{L}\right) \tag{6.8}$$

で与える．

6.3　拡散方程式の解

拡散方程式 (6.3) においても，同じく解を

$$f(x,t) = f_x(x)f_t(t)$$

と仮定すると，偏微分は

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f(x,t)}{\partial x} &= \dfrac{df_x(x)}{dx}f_t(t) \text{ and } \dfrac{\partial^2 f(x,t)}{\partial x^2} = \dfrac{d^2 f_x(x)}{dx^2}f_t(t) \\ \dfrac{\partial f(x,t)}{\partial t} &= \dfrac{df_t(t)}{dt}f_x(x) \end{cases}$$

より，(6.3) は

$$f_x(x)\frac{df_t(t)}{dt} = c^2\frac{d^2 f_x(x)}{dx^2}f_t(t) \Leftrightarrow \frac{1}{c^2}\frac{1}{f_t(t)}\frac{df_t(t)}{dt} = \frac{1}{f_x(x)}\frac{d^2 f_x(x)}{dx^2} = -\mu \tag{6.9}$$

とおくと，２つの常微分方程式

$$\begin{cases} \dfrac{d^2 f_x(x)}{dx^2} + \mu f_x(x) &= 0 \\ \dfrac{df_t(t)}{dt} + c^2 \mu f_t(t) &= 0 \end{cases}$$

が得られる．

　ここで，最初の式の特性方程式

$$\lambda^2 + \mu = 0$$

から $\omega = \sqrt{|\mu|}$ とおくと，$f_x(x)$ の一般解は

$$f_x(x) = \begin{cases} \alpha_1 \cos \omega x + \alpha_2 \sin \omega x & \mu > 0 \\ \alpha_1 x + \alpha_2 & \mu = 0 \\ \alpha_1 e^{\omega x} + \alpha_2 e^{-\omega x} & \mu < 0 \end{cases} \tag{6.10}$$

$f_t(t)$ の一般式は

$$f_t(t) = \beta e^{-c^2 \mu t}$$

と書ける．

　従って，任意の正の定数 ω にたいして，一般解は

$$f(x,t) = \begin{cases} (\alpha_1 \cos \omega x + \alpha_2 \sin \omega x) e^{-c^2 \omega^2 t} \\ \alpha_1 x + \alpha_2 \\ (\alpha_1 e^{\omega x} + \alpha_2 e^{-\omega x}) e^{c^2 \omega^2 t} \end{cases}$$

と表せる．

例 28. 時刻 $t = 0$ で，長さ 1 の薄い銅 $(c^2 = 1.14)$ の板の温度 $f(x,0)$ は

$$2 \sin 3\pi x + 5 \sin 8\pi x, \quad 0 \leq x \leq 1$$

である．板の両端を氷に固定し温度 0 °C に維持される場合，任意の時刻 $t > 0$ における温度 $f(x,t)$ を求めよ．

【解】変数分離法で

$$f(x,t) = f_x(x) f_t(t)$$

とおくと

$$\begin{cases} \dfrac{d^2 f_x(x)}{dx^2} + \mu f_x(x) &= 0 \\ \dfrac{df_t(t)}{dt} + c^2 \mu f_t(t) &= 0 \end{cases}$$

が得られる．最初の方程式の境界条件

$$f_x(0) = f_x(1) = 0$$

は

$$\mu = (m\pi)^2$$

のときのみ，$f_x(x) = 0$ でない解を持つ．故に，一般式は

$$f(x,t) = \sum_{m=1}^{\infty} (\alpha_{1,m} \cos m\pi x + \alpha_{2,m} \sin m\pi x) e^{-c^2 m^2 \pi^2 t}$$

で与える．初期条件

$$f(x,0) = 2 \sin 3\pi x + 5 \sin 8\pi x, \quad 0 \le x \le 1$$

は

$$\alpha_{n,m} = \begin{cases} 2, & n = 2, m = 3 \\ 5, & n = 2, m = 8 \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$$

なので

$$f(x,t) = 2 \sin(3\pi x) e^{-9(1.14)\pi^2 t} + 5 \sin(8\pi x) e^{-64(1.14)\pi^2 t}$$

である．

6.4　ラプラス方程式の解

直行座標系での二次元ラプラス方程式 (6.4) においては，変数変換

$$\begin{cases} x & = r \cos\theta \\ y & = r \sin\theta \end{cases}$$

を用いると，極座標系でのラプラス方程式は

$$\frac{\partial^2 f(r,\theta)}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial f(r,\theta)}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 f(r,\theta)}{\partial \theta^2} = 0 \tag{6.11}$$

となるが，θ は周期境界条件

$$f(r, \theta + 2\pi) = f(r,\theta)$$

を満たさないといけない．

ここでも変数分離法を用いて

$$f(r,\theta) = f_r(r) f_\theta(\theta)$$

を解と仮定する．

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f(r,\theta)}{\partial r} & = \dfrac{df_r(r)}{dr} f_\theta(\theta) \text{ and } \dfrac{\partial^2 f(r,\theta)}{\partial r^2} = \dfrac{d^2 f_r(r)}{dr^2} f_\theta(\theta) \\ \dfrac{\partial f(r,\theta)}{\partial \theta} & = \dfrac{df_\theta(\theta)}{d\theta} f_r(r) \text{ and } \dfrac{\partial^2 f(r,\theta)}{\partial \theta^2} = \dfrac{d^2 f_\theta(\theta)}{d\theta^2} f_r(r) \end{cases}$$

より，(6.11) は

$$
\begin{aligned}
&\frac{d^2 f_r(r)}{dr^2} f_\theta(\theta) + \frac{1}{r}\frac{df_r(r)}{dr} f_\theta(\theta) + \frac{1}{r^2} f_r(r) \frac{d^2 f_\theta(\theta)}{d\theta^2} = 0 \\
\Leftrightarrow\ &\frac{r^2}{f_r(r)}\frac{d^2 f_r(r)}{dr^2} + \frac{r}{f_r(r)}\frac{df_r(r)}{dr} = -\frac{1}{f_\theta(\theta)}\frac{d^2 f_\theta(\theta)}{d\theta^2} = \mu
\end{aligned}
\tag{6.12}
$$

となるので，２つの常微分方程式

$$
\left\{
\begin{array}{rcl}
r^2 \dfrac{d^2 f_r(r)}{dr^2} + r\dfrac{df_r(r)}{dr} - \mu f_r(r) & = & 0 \\
\dfrac{d^2 f_\theta(\theta)}{d\theta^2} + \mu f_\theta(\theta) & = & 0
\end{array}
\right.
$$

を得る．

最初の微分方程式は，オイラー型の微分方程式とよぶが，

$$
r = e^s
$$

とおくと

$$
\left\{
\begin{array}{rcccl}
\dfrac{df_r(s)}{ds} & = & \dfrac{df_r(r)}{dr}\dfrac{dr}{ds} & = & r\dfrac{df_r(r)}{dr} \\
\dfrac{d^2 f_r(s)}{ds^2} & = & \left(\dfrac{df_r(r)}{dr} + r\dfrac{d^2 f_r(r)}{dr^2}\right) r & = & r^2\dfrac{d^2 f_r(r)}{dr^2} + r\dfrac{df_r(r)}{dr}
\end{array}
\right.
$$

より

$$
\frac{d^2 f_r(s)}{ds^2} - \mu f_r(s) = 0
$$

と書ける．

特性方程式

$$
\left\{
\begin{array}{rcl}
\lambda^2 - \mu & = & 0 \\
\lambda^2 + \mu & = & 0
\end{array}
\right.
$$

が得られる．

$\omega = \sqrt{|\mu|}$ とおくと

- $\mu > 0$ のとき

$$
\left\{
\begin{array}{rcl}
f_r(s) & = & \alpha_1 e^{\omega s} + \alpha_2 e^{-\omega s} \\
f_\theta(\theta) & = & \beta_1 \cos\omega\theta + \beta_2 \sin\omega\theta
\end{array}
\right.
$$

- $\mu = 0$ のとき

$$
\left\{
\begin{array}{rcl}
f_r(s) & = & \alpha_1 s + \alpha_2 \\
f_\theta(\theta) & = & \beta_1 \theta + \beta_2
\end{array}
\right.
$$

- $\mu < 0$ のとき

$$
\left\{
\begin{array}{rcl}
f_r(s) & = & \alpha_1 \cos\omega s + \alpha_2 \sin\omega s \\
f_y(y) & = & \beta_1 e^{\omega\theta} + \beta_2 e^{-\omega\theta}
\end{array}
\right.
$$

$s = \ln r$ を代入すると，任意の正の定数 ω にたいして，一般解は

$$f(r,\theta) = \begin{cases} (\alpha_1 r^{\omega} + \alpha_2 r^{-\omega})(\beta_1 \cos\omega\theta + \beta_2 \sin\omega\theta) \\ (\alpha_1 \ln r + \alpha_2)(\beta_1\theta + \beta_2) \\ (\alpha_1 \cos\omega \ln r + \alpha_2 \sin\omega \ln r)(\beta_1 e^{\omega\theta} + \beta_2 e^{-\omega\theta}) \end{cases}$$

と表せる．

例 29. 長方形領域 $\mathbb{D} : ((x,y))_{x=0,y=0}^{a,b}$ における二次元ラプラス方程式

$$\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y^2} = 0$$

の境界条件が

$$f(0,y) = f(a,y) = 0$$

と与えられたとき，$f(x,y)$ の一般解を求めよ．

【解】

変数分離法で

$$f(x,y) = f_x(x) f_y(y)$$

とおくと

$$\begin{cases} \dfrac{d^2 f_x(x)}{dx^2} + \mu f_x(x) &= 0 \\ \dfrac{d^2 f_y(y)}{dy^2} - \mu f_y(y) &= 0 \end{cases}$$

が得られる．最初の方程式の境界条件

$$f_x(0) = f_x(a) = 0$$

は

$$\mu = \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2$$

のときのみ，$f_x(x) = 0$ でない解を持つので

$$f_x(x) = \sum_{m=1}^{\infty} \alpha_m \sin\frac{m\pi x}{a}$$

で与えられ，そのとき

$$f_y(y) = \sum_{m=1}^{\infty} \left(\beta_{1,m} e^{\frac{m\pi y}{a}} + \beta_{2,m} e^{-\frac{m\pi y}{a}}\right)$$

となるので，一般解は

$$f(x,y) = \sum_{m=1}^{\infty} \alpha_m \sin\frac{m\pi x}{a} \left(\beta_{1,m} e^{\frac{m\pi y}{a}} + \beta_{2,m} e^{-\frac{m\pi y}{a}}\right)$$

で表せる．

演習問題

1. 偏微分方程式
$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} - \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = 0$$
の一般解 $f(x,y)$ を変数分離法を用いて求めよ.
2. 変数分離法を用いて
$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} + \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = (x+y)f(x,y)$$
の一般解を求めよ.
3. 空間の二次元熱方程式は
$$\frac{\partial f(x,y,t)}{\partial t} = \alpha^2 \left(\frac{\partial^2 f(x,y,t)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f(x,y,t)}{\partial y^2} \right)$$
で表せる.
(a) $f(x,y,t) = f_x(x)f_y(y)f_t(t)$ とおいて，$f_x(x)$,$f_y(y)$,$f_t(t)$ が満たす常微分方程式を求めよ.
(b) 境界条件 $f(0,y,t) = f(a,y,t) = f(x,0,t) = f(x,b,t) = 0$ を満たす $f(x,y,t)$ の表現式を求めよ.

演習問題回答例

第一章

1.

$$\cos\theta = \frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|} = \frac{1}{2}$$

より，$\theta = \frac{\pi}{3}$ である．

2.

$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{e}_x & \boldsymbol{e}_y & \boldsymbol{e}_z \\ a_x & a_y & 0 \\ 0 & b_y & b_z \end{vmatrix} = (a_y b_z, -a_x b_z, a_x b_y)$$

3.

$$\begin{aligned}
&\frac{d[\boldsymbol{a}(u)\times\boldsymbol{b}(u)]}{du} \\
&= \frac{d\left[\begin{vmatrix} \boldsymbol{e}_x & \boldsymbol{e}_y & \boldsymbol{e}_z \\ a_x(u) & a_y(u) & a_z(u) \\ b_x(u) & b_y(u) & b_z(u) \end{vmatrix}\right]}{du} \\
&= \left(\frac{d[a_y(u)b_z(u) - a_z(u)b_y(u)]}{du}, \frac{d[a_z(u)b_x(u) - a_x(u)b_z(u)]}{du}, \frac{d[a_x(u)b_y(u) - a_y(u)b_x(u)]}{du}\right) \\
&= \left(\frac{d[a_y(u)]}{du}b_z(u) - \frac{d[a_z(u)]}{du}b_y(u), \frac{d[a_z(u)]}{du}b_x(u) - \frac{d[a_x(u)]}{du}b_z(u), \frac{d[a_x(u)]}{du}b_y(u) - \frac{d[a_y(u)]}{du}b_x(u)\right) \\
&\quad + \left(a_y(u)\frac{d[b_z(u)]}{du} - a_z(u)\frac{d[b_y(u)]}{du}, a_z(u)\frac{d[b_x(u)]}{du} - a_x(u)\frac{d[b_z(u)]}{du}, a_x(u)\frac{d[b_y(u)]}{du} - a_y(u)\frac{d[b_x(u)]}{du}\right) \\
&= \begin{vmatrix} \boldsymbol{e}_x & \boldsymbol{e}_y & \boldsymbol{e}_z \\ \frac{d[a_x(u)]}{du} & \frac{d[a_y(u)]}{du} & \frac{d[a_z(u)]}{du} \\ b_x(u) & b_y(u) & b_z(u) \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \boldsymbol{e}_x & \boldsymbol{e}_y & \boldsymbol{e}_z \\ a_x(u) & a_y(u) & a_z(u) \\ \frac{d[b_x(u)]}{du} & \frac{d[b_y(u)]}{du} & \frac{d[b_z(u)]}{du} \end{vmatrix} \\
&= \frac{d[\boldsymbol{a}(u)]}{du}\times\boldsymbol{b}(u) + \boldsymbol{a}(u)\times\frac{d[\boldsymbol{b}(u)]}{du}
\end{aligned}$$

第二章

1. (a)

$$\nabla f(r) = \left(\frac{\partial f(r)}{\partial x}, \frac{\partial f(r)}{\partial y}, \frac{\partial f(r)}{\partial z}\right)$$

ここで

$$\frac{\partial f(r)}{\partial x} = \frac{df(r)}{dr}\frac{\partial r}{\partial x}$$

であるが，$|\boldsymbol{r}| = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$ より

$$\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{2x}{2\sqrt{x^2+y^2+z^2}} = \frac{x}{r}$$

となるので

$$\frac{\partial f(r)}{\partial x} = \frac{df(r)}{dr}\frac{x}{r}$$

である．同様に

$$\frac{\partial f(r)}{\partial y} = \frac{df(r)}{dr}\frac{y\text{「}}{r}$$
$$\frac{\partial f(r)}{\partial z} = \frac{df(r)}{dr}\frac{z}{r}$$

が得られ

$$\nabla f(r) = \frac{df(r)}{rdr}(x,y,z) = \frac{df(r)}{dr}\frac{\boldsymbol{r}}{r}$$

である．

(b)

$$\nabla\cdot[f(r)\boldsymbol{r}] = \nabla f(r)\cdot\boldsymbol{r} + f(r)[\nabla\cdot\boldsymbol{r}]$$

上の 1a での結果より，

$$\nabla f(r)\cdot\boldsymbol{r} = \frac{df(r)}{dr}\frac{\boldsymbol{r}}{r}\cdot\boldsymbol{r} = \frac{r^2 df(r)}{r} = \frac{rdf(r)}{dr}$$

である．一方

$$\nabla\cdot\boldsymbol{r} = \left(\frac{dx}{dx},\frac{dy}{dy},\frac{dz}{dz}\right) = 3$$

となるので

$$\nabla\cdot[f(r)\boldsymbol{r}] = \frac{rdf(r)}{dr} + 3f(r)$$

である．

(c)

$$\begin{aligned}\nabla^2 f(r) = \nabla\cdot[\nabla f(r)] &= \nabla\cdot\frac{df(r)}{rdr}\boldsymbol{r}\\ &= \nabla\frac{df(r)}{rdr}\cdot\boldsymbol{r} + \frac{df(r)}{rdr}(\nabla\cdot\boldsymbol{r})\\ &= \nabla\frac{df(r)}{rdr}\cdot\boldsymbol{r} + \frac{3df(r)}{rdr}\end{aligned}$$

上の式の第一項で

$$\nabla\frac{df(r)}{rdr} = \left(\frac{\partial\frac{df(r)}{rdr}}{\partial x},\frac{\partial\frac{df(r)}{rdr}}{\partial y},\frac{\partial\frac{df(r)}{rdr}}{\partial z}\right)$$

であるが

$$\frac{\partial \frac{df(r)}{rdr}}{\partial x} = \left(\frac{d^2f(r)}{rdr^2} - \frac{df(r)}{r^2dr}\right) = \left(\frac{d^2f(r)}{dr^2} - \frac{df(r)}{rdr}\right)\frac{x}{r^2}$$

となる．従って

$$\nabla\frac{df(r)}{rdr} = \left(\frac{d^2f(r)}{dr^2} - \frac{df(r)}{rdr}\right)\frac{\boldsymbol{r}}{r^2}$$

となり

$$\nabla^2 f(r) = \frac{d^2f(r)}{dr^2} + \frac{2df(r)}{rdr}$$

である．

2.

$$\nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}\right) = \left(2y^2 - 3x^2z^2, 4xy, -2x^3z\right)$$

なので

$$\nabla\times(\nabla f) = \begin{vmatrix} \boldsymbol{e}_x & \boldsymbol{e}_y & \boldsymbol{e}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 2y^2-3x^2z^2 & 4xy & -2x^3z \end{vmatrix} = \left(0, -6x^2z + 6x^2z, 4y - 4y\right) = \boldsymbol{0}$$

3.

$$\begin{aligned}\boldsymbol{h} := \nabla f\times\nabla g &= \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}\right)\times\left(\frac{\partial g}{\partial x}, \frac{\partial g}{\partial y}, \frac{\partial g}{\partial z}\right) \\ &= \left(\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial g}{\partial z} - \frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial g}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial g}{\partial x}\text{¥} - \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial g}{\partial z}, \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial g}{\partial y} - \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial g}{\partial x}\right)\end{aligned}$$

ここで

$$\nabla\cdot\boldsymbol{h} = \frac{\partial h_x}{\partial x} + \frac{\partial h_y}{\partial y} + \frac{\partial h_z}{\partial z}$$

となるが

$$\begin{aligned}\frac{\partial h_x}{\partial x} &= \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\frac{\partial g}{\partial z} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial^2 g}{\partial x\partial z} - \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial z}\frac{\partial g}{\partial y} - \frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial^2 g}{\partial x\partial y} \\ \frac{\partial h_y}{\partial y} &= \frac{\partial^2 f}{\partial y\partial z}\frac{\partial g}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial^2 g}{\partial x\partial y} - \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\frac{\partial g}{\partial z} - \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial^2 g}{\partial y\partial z} \\ \frac{\partial h_z}{\partial z} &= \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial z}\frac{\partial g}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial^2 g}{\partial y\partial z} - \frac{\partial^2 f}{\partial y\partial z}\frac{\partial g}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial^2 g}{\partial x\partial z}\end{aligned}$$

従って

$$\nabla\cdot(\nabla f\times\nabla g) = 0$$

である。

4. $\boldsymbol{f}\cdot\boldsymbol{g} = x^3 + y^2$ より、左辺は $(3x^2, 2y, 0)$ である。一方

$$(\boldsymbol{g}\cdot\nabla)\boldsymbol{f} = \left(x^2\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y}\right)\boldsymbol{f} = x^2\frac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial x} + y\frac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial y} = (x^2, 0, 0) + (0, y, 0) = (x^2, y, 0)$$

となり、同じ理由で $(\boldsymbol{f}\cdot\nabla)\boldsymbol{g} = (2x^2, y, 0)$ である。また、外積の定義に基づいて計算すると

$$\nabla\times\boldsymbol{g} = \nabla\times\boldsymbol{f} = \boldsymbol{0}$$

なので、右辺の第 3,4 項は $\mathbf{0}$ で、左辺は

$$(x^2, y, 0) + (2x^2, y, 0) + \mathbf{0} + \mathbf{0} = (3x^2, 2y, 0)$$

と左辺と同じとなる。

第三章

1.
$$\sqrt{\left(\frac{dc_x}{du}\right)^2 + \left(\frac{dc_y}{du}\right)^2 + \left(\frac{dc_z}{du}\right)^2} = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$$

より

$$\int_C f dC = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2} \int_0^{\pi} [\alpha(\cos u + \sin u) + \beta u] du = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2} \left(2\alpha + \frac{\beta\pi^2}{2}\right)$$

である.

2. (a) 原点 $o(0,0,0)$ から点 $a(1,2,2)$ までの直線の方程式は

$$C : (\boldsymbol{c}(u, 2u, 2u))_{u=0}^1$$

で表せるので

$$\begin{cases} \dfrac{dc_x}{du} &= 1 \\ \dfrac{dc_y}{du} &= 2 \\ \dfrac{dc_z}{du} &= 2 \end{cases}$$

より

$$\int_C \boldsymbol{f} \cdot d\boldsymbol{c} = \int_0^1 (4u^2, 2u^2, 2u^2) \cdot (1,2,2) du = \int_0^1 12u^2 du = 4$$

(b) $f = xyz$ とおくと

$$\nabla f = (yz, zx, xy) = \boldsymbol{f}$$

従って

$$\int_C \boldsymbol{f} \cdot d\boldsymbol{c} = \int_C \nabla f \cdot d\boldsymbol{c} = [f]_0^a = 4$$

3. (a) 上の半径が 1 の円錐

(b)

$$\begin{aligned} \frac{\partial \boldsymbol{s}}{\partial u} &= (\cos v, \sin v, 1) \\ \frac{\partial \boldsymbol{s}}{\partial v} &= (-u\sin v, u\cos v, 0) \end{aligned} \tag{6.13}$$

より

$$\left|\frac{\partial \boldsymbol{s}}{\partial u} \times \frac{\partial \boldsymbol{s}}{\partial v}\right| = |(-u\cos v, -u\sin v, u)| = \sqrt{2}u$$

となるので，面積は

$$\iint_{\mathbb{S}} d\mathbb{S} = \int_0^{2\pi}\int_0^1 \sqrt{2}ududv = \sqrt{2}\pi$$

である．

(c)

$$\frac{\partial \boldsymbol{s}}{\partial u}\times\frac{\partial \boldsymbol{s}}{\partial v} = (-u\cos v, -u\sin v, u)$$

より

$$\begin{aligned}
\iint_{\mathbb{S}} \boldsymbol{f}\cdot d\boldsymbol{S} &= \int_0^{2\pi}\int_0^1 (u,v,0)\cdot(-u\cos v, -u\sin v, u)dudv \\
&= \int_0^{2\pi}\int_0^1 (u^2\cos v + uv\sin v)dudv \\
&= \frac{1}{3}\int_0^{2\pi}\cos vdv + \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} v\sin vdv \\
&= \frac{1}{3}\int_0^{2\pi}\cos vdv - \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} vd\cos v \\
&= \pi
\end{aligned}$$

4. 球の内部は

$$\begin{aligned}
-r &\leq x \leq r \\
-\sqrt{r^2-x^2} &\leq y \leq \sqrt{r^2-x^2} \\
-\sqrt{r^2-x^2-y^2} &\leq z \leq \sqrt{r^2-x^2-y^2}
\end{aligned}$$

で表されるので

$$\begin{aligned}
\iiint_{\mathcal{V}} x^2dxdydz &= \int_{-r}^{r} x^2dx\int_{-\sqrt{r^2-x^2}}^{\sqrt{r^2-x^2}} dy\int_{-\sqrt{r^2-x^2-y^2}}^{\sqrt{r^2-x^2-y^2}} dz \\
&= 2\int_{-r}^{r} x^2dx\int_{-\sqrt{r^2-x^2}}^{\sqrt{r^2-x^2}}\sqrt{r^2-x^2-y^2}dy
\end{aligned}$$

ここで，$y=\alpha\sin t$ とおくと

$$\int_{-\alpha}^{\alpha}\sqrt{\alpha^2-y^2}dy = \int_{-\pi/2}^{\pi/2}\alpha\cos t\times\alpha\cos tdt = \alpha^2\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\cos^2 tdt = \frac{\pi\alpha^2}{2}$$

なので

$$\iiint_{\mathcal{V}} x^2dxdydz = \int_{-r}^{r} x^2\pi(r^2-x^2)dx = \frac{4\pi r^5}{15}$$

対称性より

$$\iiint_{\mathcal{V}} x^2dxdydz = \iiint_{\mathcal{V}} y^2dxdydz = \iiint_{\mathcal{V}} z^2dxdydz$$

から

$$\iiint_{\mathcal{V}} \boldsymbol{f}d\mathcal{V} = \frac{4\pi r^5}{15}(\boldsymbol{e}_x + \boldsymbol{e}_y + \boldsymbol{e}_y)$$

5. $\boldsymbol{f}$ は z 方向の成分が 0 なので，極座標

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$
$$\theta = \arctan \frac{x}{y}$$

に変換すると， 円筒の上下に蓋をした閉曲面 $\mathbb{S}$ に対して

$$\iiint_{\mathcal{V}} \nabla \cdot \boldsymbol{f} d\mathcal{V} = \iint_{\mathbb{S}} \boldsymbol{f} \cdot \boldsymbol{n} d\mathbb{S}$$
$$= \iint_{\mathbb{S}} (\sin\theta, \cos\theta, 0) \cdot d\boldsymbol{S} = \int_0^h \int_0^{2\pi} r d\theta dz = 2\pi r h$$

が成り立つ.

6. 曲線 C で囲まれた領域を $\mathbb{S}$ とすると，ストークスの定理により

$$\oint_C \boldsymbol{f} \cdot d\boldsymbol{c} = \iint_{\mathbb{S}} \nabla \times \boldsymbol{f} \cdot d\boldsymbol{S} = \iint_{\mathbb{S}} \boldsymbol{0} \cdot d\boldsymbol{S} = 0$$

第五章

1. 【積分因子法による解法】

与えられた方程式の両辺に $\frac{a(x)}{x}$ を掛けて移項し

$$\frac{df(x)}{dx} a(x) + \frac{a(x)}{x} f(x) = (1 - x^2) a(x)$$

を得る．この方程式において

$$\frac{da(x)}{dx} = \frac{a(x)}{x}$$

を満たす関数

$$a(x) = \alpha x$$

に対して

$$\frac{df(x)x}{dx} = (1 - x^2)x$$

が成り立つから

$$f(x) = -\frac{x^3}{4} + \frac{x}{2} + \frac{\beta}{x}$$

である.

【定数変化法による解法】

与えられた方程式に対応する同次方程式

$$\frac{df(x)}{f(x)} = -\frac{dx}{x}$$

の一般解は

$$f(x) = \frac{\alpha}{x}$$

で与えられる.

α を x の関数 $\alpha(x)$ とし，$f(x) = \frac{\alpha(x)}{x}$ とおいて

$$x\frac{df(x)}{dx} = \frac{d\alpha(x)}{dx} - \frac{\alpha(x)}{x} = \frac{d\alpha(x)}{dx} - f(x)$$

を与えられた方程式に代入すると

$$\frac{d\alpha(x)}{dx} = -x(x^2-1)$$

から

$$\alpha(x) = -\frac{x^4}{4} + \frac{x^2}{2} + \beta$$

を得る．従って

$$f(x) = -\frac{x^3}{4} + \frac{x}{2} + \frac{\beta}{x}$$

である．

2. • 必要性

$\omega = \sqrt{|c|}$ とおくと

(a) $c < 0$ の場合

一般解は

$$f(x) = \alpha_1 e^{\omega x} + \alpha_2 e^{-\omega x}$$

となり，初期条件より $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$ を得

$$f(x) = 0$$

である．

(b) $c = 0$ の場合

一般解は

$$f(x) = \alpha_1 x + \alpha 2$$

となり，初期条件より $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$ なので

$$f(x) = 0$$

(c) $c > 0$ の場合

一般解は

$$f(x) = \alpha_1 \cos\omega x + \alpha_2 \sin\omega x$$

となるので，初期条件より

$$\begin{cases} \alpha_1 \cos\omega a + \alpha_2 \sin\omega a = 0 \\ \alpha_1 \cos\omega b + \alpha_2 \sin\omega b = 0 \end{cases}$$

を得られるので，α_1 および α_2 に対して代入すると

$$\sin[\pm\omega(a-b)] = 0$$

となるので

$$c = \left(\frac{m\pi}{b-a}\right)^2$$

である．

- 充分性

$$c = \left(\frac{m\pi}{b-a} \right)^2$$

の場合，$\omega = \sqrt{|c|}$ とおく．
初期条件 $f(a) = 0$ を満たすように一般解 $f(x) = \alpha_1 \cos \omega x + \alpha_2 \sin \omega x$ に対して

$$\alpha_1 = -\sin \omega a, \quad \alpha_2 = \cos \omega a$$

とし，関数

$$\begin{aligned} f(x) &= -\sin \omega a \cos \omega x + \cos \omega a \sin \omega x \\ &= \sin \omega (x-a) \\ &= \sin \left(m\pi \frac{x-a}{b-a} \right) \end{aligned}$$

を考察すると

$$\cos \omega b = \cos(\omega(a-b) + \omega a) = (-1)^m \cos \omega a$$

および

$$\sin \omega b = \sin(\omega(b-a) + \omega a) = (-1)^m \sin \omega a$$

より，条件 $f(a) = f(b) = 0$ を満たす．