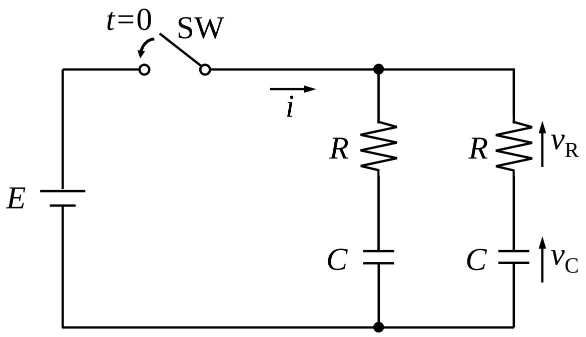
基礎演習 B 解答
2018 年 12 月 7 日実施分

1　問題 1

下図に示す回路について，$t=0$ でスイッチ (SW) を閉じて直流電圧 E を加え、時間が経過した場合の各素子に流れる電流、電圧の変化について考える。ただし、キャパシタに初期電荷はないとする。以下の問いに答えなさい。
(1) コンデンサにかかる電圧 v_C を求めなさい。
(2)(1) の結果をふまえ、コンデンサに流れる電流 i と抵抗にかかる電圧 v_R を求めなさい。
(3)(1),(2) の結果をふまえ、横軸 t、縦軸 i、v_C としたときのグラフ (変化傾向の概形) を描きなさい。



1.1　解答 (1)

電圧 v_C は定常状態及び過渡状態の電圧の和から求めることができる．
初めにスイッチを閉じた回路における回路方程式は式 (1) 及び式 (2) と表すことができる．

$$\frac{1}{C}\int(\frac{i}{2})\mathrm{d}t + R\frac{i}{2} = E \tag{1}$$

$$\frac{i}{2} = C\frac{\mathrm{d}v_\mathrm{C}}{\mathrm{d}t} \tag{2}$$

また，電圧 v_C を用いて表すと式 (3) と表すことができる．

$$RC\frac{\mathrm{d}v_\mathrm{C}}{\mathrm{d}t} + v_\mathrm{C} = E \tag{3}$$

定常状態における電圧を v_s 及び過渡状態における電圧を v_t とすると，v_C は式 (4) と表される．

$$v_\mathrm{C} = v_\mathrm{s} + v_\mathrm{t} \tag{4}$$

定常状態の場合では，$v_\mathrm{s} = E$ が成り立つので，過渡状態の場合では回路方程式で $E = 0$ として，補助方程式をたて，式 (5) と導くことができる．なお，A, C_0 は積分定数である．

$$\begin{aligned}
RC\frac{\mathrm{d}v_\mathrm{C}}{\mathrm{d}t} + v_\mathrm{t} &= 0 \\
RC\frac{\mathrm{d}v_\mathrm{C}}{\mathrm{d}t} &= -v_\mathrm{t} \\
RC\mathrm{d}v_\mathrm{t} &= -v_\mathrm{t}\mathrm{d}t \\
\frac{1}{v_\mathrm{t}}\mathrm{d}t &= -\frac{1}{RC}\mathrm{d}t \\
\int\frac{1}{v_\mathrm{t}}\mathrm{d}t &= -\int\frac{1}{RC}\mathrm{d}t \\
\ln|v_\mathrm{t}| &= -\frac{t}{RC} + C_0 \\
|v_\mathrm{t}| &= \epsilon^{-\frac{t}{RC}+C_0} \\
v_\mathrm{t} &= \pm\epsilon^{-\frac{t}{RC}+C_0} \\
v_\mathrm{t} &= A\epsilon^{-\frac{t}{RC}} \quad (\text{ただし，} A = \pm\epsilon^{C_0})
\end{aligned} \tag{5}$$

v_C は $v_\mathrm{s}, v_\mathrm{t}$ を用いて式 (6) と表すことができる．

$$\begin{aligned} v_\mathrm{C} &= v_\mathrm{s} + v_\mathrm{t} \\ &= E + A\epsilon^{-\frac{t}{RC}} \end{aligned} \tag{6}$$

初期電荷は 0 であることから，$t = 0$ において，$v_\mathrm{C} = 0$ であることから，式 (7) が成り立つ．

$$\begin{aligned} E + A &= 0 \\ A &= -E \end{aligned} \tag{7}$$

以上から，v_C は式 (8) と導くことができる．

$$v_\mathrm{C} = E(1 - \epsilon^{-\frac{t}{RC}}) \tag{8}$$

1.2　解答 (2)

電流 i は式 (9) と求めることができる．

$$\begin{aligned} i &= 2C\frac{\mathrm{d}v_\mathrm{C}}{\mathrm{d}t} \\ &= 2C\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\{E(1 - \epsilon^{-\frac{t}{RC}})\} \\ &= 2CE\frac{1}{RC}\epsilon^{-\frac{t}{RC}} \\ &= 2\frac{E}{R}\epsilon^{-\frac{t}{RC}} \end{aligned} \tag{9}$$

同様にして，抵抗値 R の抵抗にかかる逆起電力 v_R は式 (10) と表すことができる．

$$\begin{aligned} v_\mathrm{R} &= R\frac{i}{2} \\ &= E\epsilon^{-\frac{t}{RC}} \end{aligned} \tag{10}$$

1.3　解答 (3)

v_C, i の時間変化の波形は図 1 のようになる．

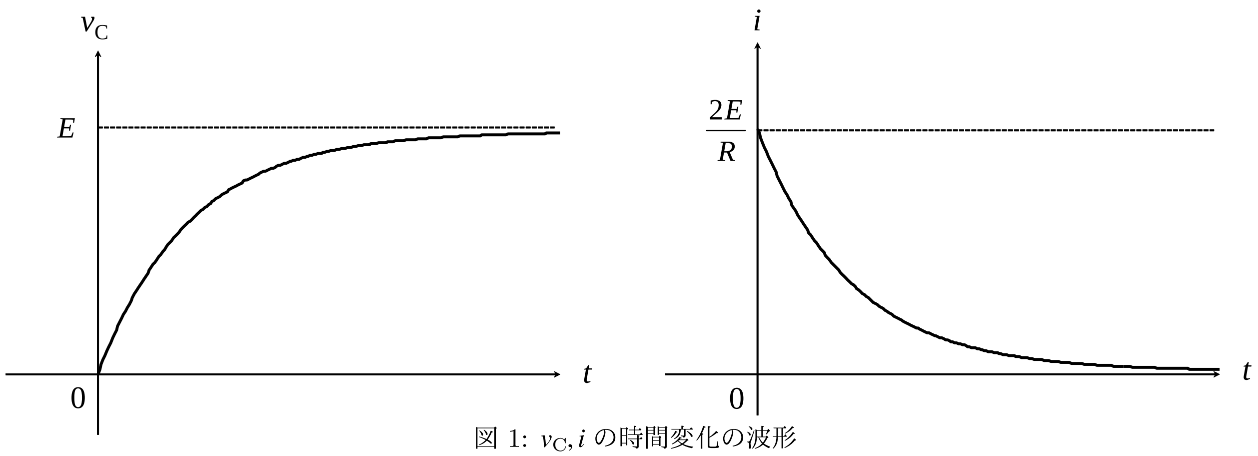
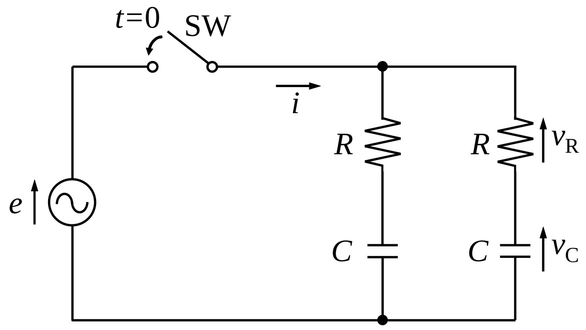


図 1: v_C, i の時間変化の波形

2　問題 2

下図に示す回路において、$t = 0$ でスイッチ (SW) を閉じて交流電圧 $e = E_\mathrm{m}\sin\omega t$ を加えたとする。ただし、コンデンサに初期電荷はないとする。以下の問いに答えなさい。
(1) コンデンサにかかる電圧 v_C を求めなさい。

(2) コンデンサに流れる電流 i を求めなさい。



2.1　解答 (1)

スイッチを閉じた回路における回路方程式を立てると式 (11) 及び式 (12) と表すことができる．

$$\frac{1}{C}\int\frac{i}{2}\mathrm{d}t + R\frac{i}{2} = E_\mathrm{m}\sin\omega t \tag{11}$$

$$\frac{i}{2} = C\frac{\mathrm{d}v_\mathrm{C}}{\mathrm{d}t} \tag{12}$$

初めに定常状態について考える．回路方程式より定常状態における電圧 v_s を式 (13) とおく．

$$v_\mathrm{s} = V_\mathrm{m}\sin(\omega t + \theta) \tag{13}$$

v_s を回路方程式に代入することによって式 (14) を導くことができる．

$$\begin{aligned} RC\frac{\mathrm{d}v_\mathrm{s}}{\mathrm{d}t} + v_\mathrm{s} &= E_\mathrm{m}\sin\omega t \\ \omega RCV_\mathrm{m}\sin(\omega t+\theta) + V_\mathrm{m}\sin(\omega t+\theta) &= E_\mathrm{m}\sin\omega t \\ V_\mathrm{m}\sqrt{1+(\omega RC)^2}\sin(\omega t+\theta+\phi) &= E_\mathrm{m}\sin\omega t \end{aligned} \tag{14}$$

したがって，両辺を比較することによって，式 (15) から式 (16) が成立する．

$$\begin{aligned} E_\mathrm{m} &= V_\mathrm{m}\sqrt{1+(\omega RC)^2} \\ V_\mathrm{m} &= \frac{E_\mathrm{m}}{\sqrt{1+(\omega RC)^2}} \end{aligned} \tag{15}$$

$$\begin{aligned} \omega t &= \omega t + \theta + \phi \\ \theta &= -\phi = -\tan^{-1}\omega CR \end{aligned} \tag{16}$$

以上より，v_s は式 (17) と導くことができる．

$$v_\mathrm{s} = \frac{E_\mathrm{m}}{\sqrt{1+(\omega RC)^2}}\sin(\omega t - \tan^{-1}\omega CR) \tag{17}$$

次に過渡状態について考える．
回路方程式より，過渡状態における電圧 v_t は式 (18) と表すことができる．ただし，A, C_0 は積分定数である．

$$\begin{aligned} RC\frac{\mathrm{d}v_\mathrm{t}}{\mathrm{d}t} + v_\mathrm{t} &= 0 \\ RC\mathrm{d}v_\mathrm{t} &= v_\mathrm{t}\mathrm{d}t \\ \frac{1}{v_\mathrm{t}} &= -\frac{1}{RC}\mathrm{d}t \\ \ln|v_\mathrm{t}| &= -\frac{t}{RC} + C_0 \\ |v_\mathrm{t}| &= \epsilon^{-\frac{t}{RC}+C_0} \\ v_\mathrm{t} &= \pm\epsilon^{-\frac{t}{RC}+C_0} \\ v_\mathrm{t} &= A\epsilon^{-\frac{t}{RC}} \quad (\text{ただし，} A = \pm\epsilon^{C_0}) \end{aligned} \tag{18}$$

v_{C} は求めた v_{s} 及び v_{t} を用いて，式 (19) と表すことができる．

$$\begin{aligned} v_{\mathrm{C}} &= v_{\mathrm{s}} + v_{\mathrm{t}} \\ &= \frac{E_{\mathrm{m}}}{\sqrt{1+(\omega RC)^2}} \sin(\omega t - \tan^{-1}\omega CR) + A\epsilon^{-\frac{t}{RC}} \end{aligned} \tag{19}$$

$t = 0$ で v_{C} より，式 (20) が成立する．

$$\begin{aligned} v_{\mathrm{C}} &= \frac{E_{\mathrm{m}}}{\sqrt{1+(\omega RC)^2}} \sin(\omega t - \tan^{-1}\omega CR) + \frac{E_{\mathrm{m}}}{\sqrt{1+(\omega RC)^2}} \sin(\tan^{-1}\omega CR)\epsilon^{-\frac{t}{RC}} \\ &= \frac{E_{\mathrm{m}}}{\sqrt{1+(\omega RC)^2}} \left\{ \sin(\omega t - \tan^{-1}\omega CR) + \epsilon^{-\frac{t}{RC}} \sin(\tan^{-1}\omega CR) \right\} \end{aligned} \tag{20}$$

2.2　解答 (2)

回路全体に流れる電流 i は式 (21) と表すことができる．

$$\begin{aligned} i &= 2C\frac{\mathrm{d}v_{\mathrm{C}}}{\mathrm{d}t} \\ &= 2C\frac{E_{\mathrm{m}}}{\sqrt{1+(\omega RC)^2}} \left\{ \omega\cos(\omega t - \tan^{-1}\omega CR) - \frac{1}{RC}\epsilon^{-\frac{t}{RC}} \sin(\tan^{-1}\omega CR)) \right\} \\ &= \frac{2E_{\mathrm{m}}}{\sqrt{1+(\omega RC)^2}} \left\{ \omega C\cos(\omega t - \tan^{-1}\omega CR) - \frac{1}{R}\epsilon^{-\frac{t}{RC}} \sin(\tan^{-1}\omega CR)) \right\} \end{aligned} \tag{21}$$