基礎演習 B　解答
2018 年 12 月 21 日 実施

1　問題 1

図 1 に示した回路において, $t = 0$ でスイッチ SW を開いた. その後, インダクタ L に流れる電流 i を求めよ.

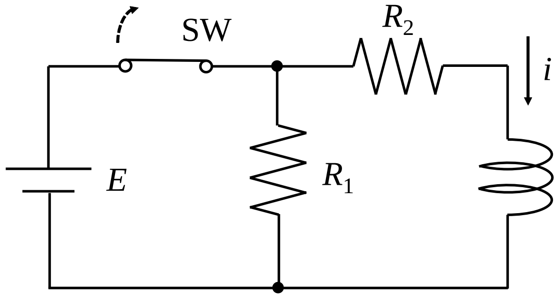

図 1: 問題 1 の回路

キルヒホッフの電圧則より, 回路方程式は次の式のようにあらわすことができる.

$$L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + R_1 i + R_2 i = 0$$
$$L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + (R_1 + R_2)i = 0 \tag{1}$$

式 (1) に示した回路方程式は, 1 階同次線形微分方程式なので, 電流 i は次の式のように表すことができる. ただし, A は積分定数である.

$$i = A\varepsilon^{-\frac{R_1+R_2}{L}t} \tag{2}$$

スイッチが閉じて直流電流が流れて, 十分な時間が経っている場合, インダクタは短絡と見なせるため, $t = 0$ でインダクタ L に流れる電流はオームの法則より, 次の式のようにあらわすことができる.

$$i|_{t=0} = \frac{E}{R_2} \tag{3}$$

式 (2) において, $t = 0$ とした場合の値と式 (3) を比較することで, 積分定数 $A = \frac{E}{R_2}$ が得られる.

したがって, 求める電流 i は次のようになる.

$$i = \frac{E}{R_2}\varepsilon^{-\frac{R_1+R_2}{L}t} \tag{4}$$

2　問題 2

図 2 に示した回路において, $t = 0$ でスイッチ SW を閉じた. その後, 抵抗 R_2 に流れる電流 i_R を求めよ.

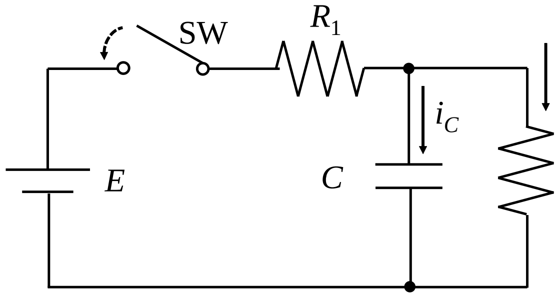

図 2: 問題 2 の回路

スイッチを閉じた後の回路方程式は, キルヒホッフの電圧則より次の式のように表すことができる.

$$R_1(i_C + i_R) + R_2 i_R = E \tag{5}$$

ここで, キャパシタ C にかかる電圧を v_C とすると, 電流 i_C は次の式のように表すことができる.

$$i_C = C\frac{\mathrm{d}v_C}{\mathrm{d}t} \tag{6}$$

また, キャパシタ C と抵抗 R_2 は並列であり, v_C は抵抗 R_2 にかかる電圧 v_R に等しいため, v_C は次の式のように表すことができる.

$$\begin{aligned} v_C &= v_R \\ &= R_2 i_R \end{aligned} \tag{7}$$

式 (6) に式 (7) を代入することで, i_C を R_2及び i_R を用いて, 次の式のように表すことができる.

$$i_C = CR_2\frac{\mathrm{d}i_R}{\mathrm{d}t} \tag{8}$$

式 (5) に式 (8) を代入することで, i_R で表された回路方程式を得ることができる.

$$R_1(CR_2\frac{\mathrm{d}i_R}{\mathrm{d}t} + i_R) + R_2 i_R = E$$
$$CR_1R_2\frac{\mathrm{d}i_R}{\mathrm{d}t} + (R_1 + R_2)i_R = E \tag{9}$$

このとき, 定常状態における電流を i_s, 過渡状態における電流を i_t とすると次の式のような関係が成り立つ.

$$i_R = i_s + i_t \tag{10}$$

定常状態においてキャパシタは開放と見なせるため, 抵抗に流れる電流 i_s はオームの法則より次の式のように求めることができる.

$$i_s = \frac{E}{R_1 + R_2} \tag{11}$$

過渡状態の電流は式 (9) の回路方程式において, 右辺の $E = 0$ とした, 補助方程式を立て, 1 階同次線形微分方程式とすることで, 次のように求めることができる. ただし, A は積分定数である.

$$\begin{aligned} CR_1R_2\frac{\mathrm{d}i_t}{\mathrm{d}t} + (R_1 + R_2)i_t &= 0 \\ i_t &= A\varepsilon^{-\frac{R_1+R_2}{CR_1R_2}t} \end{aligned} \tag{12}$$

式 (11) 及び式 (12) を式 (10) に代入して, 電流 i_R は次のように表すことができる.

$$i_R = \frac{E}{R_1 + R_2} + A\varepsilon^{-\frac{R_1+R_2}{CR_1R_2}t} \tag{13}$$

また, 初期条件として $t = 0$ での電流 i_R を考える．スイッチを入れた瞬間においてキャパシタは短絡と見なせるため, 抵抗 R_2 に電流は流れず $i_R = 0$ となる．よって, 積分定数 A は次のように求めることができる．

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{E}{R_1 + R_2} + A \\ A &= -\frac{E}{R_1 + R_2} \end{aligned} \tag{14}$$

したがって, 求める電流 i_R は次のように表すことができる．

$$i_R = \frac{E}{R_1 + R_2}\left(1 - \varepsilon^{-\frac{R_1+R_2}{CR_1R_2}t}\right) \tag{15}$$

3 補足 (1 階非同次線形微分方程式)

式 (9) のような 1 階非同次線形微分方程式の解き方．次の式のような形の微分方程式を考える．

$$y' + P(x)y = Q(x) \tag{16}$$

式 (9) の場合では, $P(x) = \frac{R_1+R_2}{CR_1R_2}$, $Q(x) = \frac{E}{CR_1R_2}$ となる．ここで, 特殊解 y_1 がわかっているとする．式 (9) の場合では定常状態の電流 $i_t = \frac{E}{R_1+R_2}$ であり, 式 (9) を満たす特殊解である．

ここで, 求める解 y が特殊解 y_1 及び関数 $y_2(x)$ を用いて次のようにあらわすことができると仮定する．

$$y = y_1 + y_2(x) \tag{17}$$

式 (17) を式 (16) に代入する．

$$\begin{aligned} (y_1 + y_2(x))' + P(x)(y_1 + y_2(x)) &= Q(x) \\ y_1' + y_2'(x) + P(x)y_1 + P(x)y_2(x) &= Q(x) \end{aligned} \tag{18}$$

ここで, $y_1' + P(x)y_1 = Q(x)$ を式 (18) に代入すると, 次のような 1 階同次線形微分方程式が得られる．

$$y_2' + P(x)y_2 = 0 \tag{19}$$

よって, $y_2 = A\exp(-\int P(x)\mathrm{d}x)$ であり, 式 (9) の場合では, $E = 0$ として求めた過渡電流 i_t である．

以上より, 求める解は次のようになる．なお, 積分定数については, 初期条件を与えることで求めることができる．

$$y = y_1 + A\exp(-\int P(x)\mathrm{d}x) \tag{20}$$