

# 応用数学 B

韓 承鎬

2023 年 3 月 18 日

# 目次

|       |                              |    |
|-------|------------------------------|----|
| 第 1 章 | ベクトル                         | 4  |
| 1.1   | ベクトル . . . . .               | 4  |
| 1.2   | 空間における微分 . . . . .           | 8  |
| 第 2 章 | スカラー場とベクトル場                  | 12 |
| 2.1   | 勾配ベクトル . . . . .             | 12 |
| 2.2   | ベクトル場の発散 . . . . .           | 15 |
| 2.3   | ベクトル場の回転 . . . . .           | 17 |
| 2.4   | ナブラを含む微分演算の公式とその応用 . . . . . | 19 |
| 第 3 章 | 空間上の積分                       | 25 |
| 3.1   | 線積分 . . . . .                | 25 |
| 3.2   | 面積分 . . . . .                | 30 |
| 3.3   | 体積分 . . . . .                | 34 |
| 3.4   | ガウスの発散定理 . . . . .           | 38 |
| 3.5   | ストークスの定理 . . . . .           | 40 |
| 第 4 章 | 常微分方程式                       | 45 |
| 4.1   | 一階常微分方程式 . . . . .           | 47 |
| 4.2   | 二階常微分方程式 . . . . .           | 53 |
| 第 5 章 | 偏微分方程式                       | 65 |
| 5.1   | 二階線形偏微分方程式 . . . . .         | 68 |
| 5.2   | 波動方程式の解 . . . . .            | 69 |
| 5.3   | 拡散方程式の解 . . . . .            | 72 |
| 5.4   | ラプラス方程式の解 . . . . .          | 74 |
| 第 6 章 | ラプラス変換とフーリエ変換の応用             | 79 |
| 6.1   | ラプラス変換 . . . . .             | 79 |
| 6.2   | ラプラス変換の性質 . . . . .          | 80 |
| 6.3   | 常微分方程式での応用 . . . . .         | 81 |
| 6.4   | フーリエ変換 . . . . .             | 83 |

---

|     |                      |    |
|-----|----------------------|----|
| 6.5 | フーリエ変換の性質 . . . . .  | 86 |
| 6.6 | 偏微分方程式での応用 . . . . . | 86 |

# 記号

## 字体の定義

|              |         |
|--------------|---------|
| $\alpha$     | 定数      |
| $a$          | スカラー, 点 |
| $\mathbf{a}$ | ベクトル    |
| $C$          | 線       |
| $S$          | 面       |
| $S$          | 有向平面    |
| $V$          | 体積      |

## 変数と各軸成分の表記

|                 |  |
|-----------------|--|
| $f_x$           | ベクトル $f$ の $x$ 成分                          |
| $f(u)$          | $u$ を変数とするスカラー値関数                          |
| $\mathbf{f}(u)$ | $u$ を変数とするベクトル値関数                          |
| $f_x(u)$        | $u$ を変数とするベクトル値関数 $\mathbf{f}(u)$ の $x$ 成分 |

## 常微分の省略表記

|              |   |
|--------------|---|
| $f'(u)$      | 関数 $f(u)$ の一階常微分 $\frac{df(u)}{du}$             |
| $f''(u)$     | 関数 $f(u)$ の二階常微分 $\frac{d^2f(u)}{du^2}$         |
| $f^{(n)}(u)$ | 関数 $f(u)$ の $n$ 階常微分 $\frac{d^{(n)}f(u)}{du^n}$ |

## 記号の定義

|                                    |  |
|------------------------------------|--|
| $\mathbf{a} \parallel \mathbf{b}$  | ベクトル $\mathbf{a}$ と $\mathbf{b}$ が平行または同一直線上にある            |
| $\mathbb{E}_1 \wedge \mathbb{E}_2$ | 事象 $\mathbb{E}_1$ と $\mathbb{E}_2$ の “かつ”, すなわち “and” ロジック |

# 第1章

## ベクトル

### 1.1 ベクトル

スカラー，ベクトル

定義 1. 大きさのみを持つ量をスカラーといい，大きさと向きを持つ量をベクトルという．

表現 矢印を用いて，矢印の長さで大きさ，方向で向きを表す．

大きさ ベクトル  $a$  の大きさは絶対値記号を用いて  $|a|$  で表す．

零ベクトル 大きさが 0 のベクトルを零ベクトルといい，0 で表す．

単位ベクトル 大きさが 1 のベクトルを単位ベクトルという．ベクトル  $a$  と同じ向きを持つ単位ベクトルは

$$\frac{\mathbf{a}}{|\mathbf{a}|} = \frac{(a_x, a_y, a_z)}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}}$$

で求められる．

相等 ベクトル  $a$  と  $b$  の大きさが等しく，向きが平行または同一直線上にあるとき， $a$  と  $b$  は等しいという．数式で表すと

$$\mathbf{a} = \mathbf{b} \Leftrightarrow (|\mathbf{a}| = |\mathbf{b}|) \wedge (\mathbf{a} \parallel \mathbf{b})$$

となる．

#### 1.1.1 ベクトルの成分

基本ベクトル

定義 2.  $x, y, z$  軸の正の方向を向いた大きさが 1 のベクトル

$$\mathbf{e}_x = (1, 0, 0), \mathbf{e}_y = (0, 1, 0), \mathbf{e}_z = (0, 0, 1)$$

はそれぞれ  $x, y, z$  軸上の単位ベクトルとなり，これらを座標空間の基本ベクトルという．

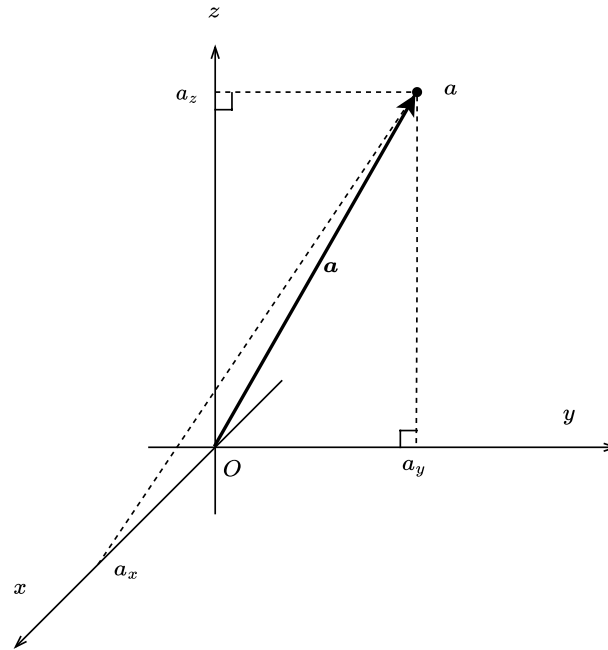


図 1.1 ベクトルの成分

## ベクトルの成分

定義 3. 図 1.1 で示したように、座標空間において、原点を始点とするベクトル  $a$  の終点を  $a$  としたとき、 $a$  を点  $a$  の位置ベクトルという。点  $a$  の座標が  $(a_x, a_y, a_z)$  であるとき、 $(a_x, a_y, a_z)$  を  $a$  の成分といい、 $a = (a_x, a_y, a_z)$  と表す。ここで、 $a_x, a_y, a_z$  は順に  $a$  の  $x$  成分、 $y$  成分、 $z$  成分という。

$a = (a_x, a_y, a_z)$  のとき、基本ベクトルを用いて

$$a = a_x e_x + a_y e_y + a_z e_z$$

で表せる。

## 1.1.2 ベクトルの和とスカラー積

## ベクトルの和

定義 4. 2つのベクトル  $a$  と  $b$  が与えられたとき、 $a$  の終点到  $b$  の始点を合わせ、 $a$  の始点から  $b$  の終点に至るベクトルを  $a + b$  と定義<sup>a</sup>する。

<sup>a</sup> この定義からなぜ完全に一致するベクトルのみを相等と定義しなかったかを考えてみよう。

## 【性質】

1. 交換則： $a + b = b + a$
2. 結合則： $(a + b) + c = a + (b + c)$

## ベクトルのスカラー積

定義 5. ベクトル  $\mathbf{a}$  と実数  $\alpha$  に対して, ベクトルのスカラー倍  $\alpha\mathbf{a}$  を次のように定義する.

- $\alpha > 0$  のときは,  $\mathbf{a}$  と同一直線上同じ向きで, 大きさ  $\alpha$  倍のベクトル
- $\alpha = 0$  のときは, 大きさが 0 の零ベクトル  $\mathbf{0}$
- $\alpha < 0$  のときは,  $\mathbf{a}$  と同一直線上反対の向きで, 大きさ  $|\alpha|$  倍のベクトル

## 【性質】

1.  $|\alpha\mathbf{a}| = |\alpha||\mathbf{a}|$
2.  $\alpha(\beta\mathbf{a}) = (\alpha\beta)\mathbf{a}$
3.  $\alpha(\mathbf{a} + \mathbf{b}) = \alpha\mathbf{a} + \alpha\mathbf{b}$
4.  $(\alpha + \beta)\mathbf{a} = \alpha\mathbf{a} + \beta\mathbf{a}$
5.  $0\mathbf{a} = \alpha\mathbf{0} = \mathbf{0}$

和 (差), スカラー倍を成分で表すと

1.  $(a_x, a_y, a_z) \pm (b_x, b_y, b_z) = (a_x \pm b_x, a_y \pm b_y, a_z \pm b_z)$
2.  $\alpha(a_x, a_y, a_z) = (\alpha a_x, \alpha a_y, \alpha a_z)$

が成り立つ.

## 1.1.3 ベクトルの内積

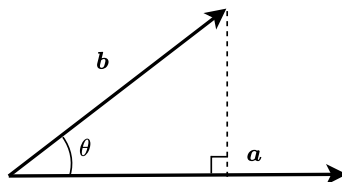


図 1.2 ベクトルの内積

## 内積

定義 6.  $\mathbf{0}$  でない二つのベクトル  $\mathbf{a}, \mathbf{b}$  に対して, 内積 (スカラー積) を

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = |\mathbf{a}||\mathbf{b}| \cos \theta$$

と定める. ここで,  $\theta$  は  $\mathbf{a}$  と  $\mathbf{b}$  の始点を一致させたときに二つのベクトルがなす角度である. 零ベクトルに対しては,  $\mathbf{0} \cdot \mathbf{0} = \mathbf{0} \cdot \mathbf{a} = \mathbf{a} \cdot \mathbf{0} = 0$  と定める.

## 【性質】

1.  $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{b} \cdot \mathbf{a}$
2.  $(\alpha\mathbf{a}) \cdot \mathbf{b} = \mathbf{a} \cdot (\alpha\mathbf{b}) = \alpha(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})$

3.  $\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + \mathbf{a} \cdot \mathbf{c}$

4. 基本ベクトルに対して

$$\mathbf{e}_x \cdot \mathbf{e}_x = \mathbf{e}_y \cdot \mathbf{e}_y = \mathbf{e}_z \cdot \mathbf{e}_z = 1, \quad \mathbf{e}_x \cdot \mathbf{e}_y = \mathbf{e}_y \cdot \mathbf{e}_z = \mathbf{e}_z \cdot \mathbf{e}_x = 0$$

が成り立つ.

5. 座標空間では  $\mathbf{a} = (a_x, a_y, a_z), \mathbf{b} = (b_x, b_y, b_z)$  のとき

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z, \quad |\mathbf{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$$

である.

### 1.1.4 ベクトルの外積

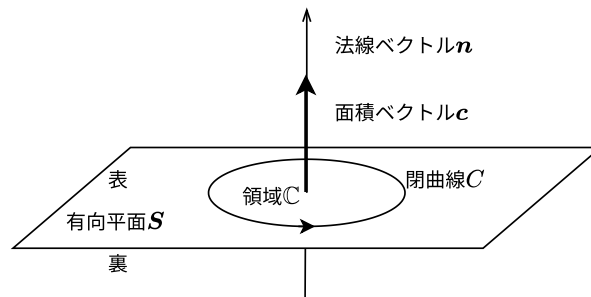


図 1.3 面積ベクトル

#### 面積ベクトル

定義 7. 空間内の表と裏が指定された有向平面  $S$  に対し,  $S$  に垂直で裏から表方向を向いた単位ベクトル  $\mathbf{n}$  を  $S$  の単位法線ベクトルという.  $S$  の平面上の閉曲線  $C$  によって囲まれた領域  $\mathbb{C}$  の面積を  $\alpha$  とする. そのとき, ベクトル  $\mathbf{c} = \alpha \mathbf{n}$  を領域  $\mathbb{C}$  の面積ベクトルという.

点  $p$  が閉曲線  $C$  上を  $\mathbb{C}$  の内部を左手に見る向きにまわるとき, 右ネジの進む方向が  $S$  の単位法線ベクトルと一致するならば, 閉曲線を正の向きに回るといふ.

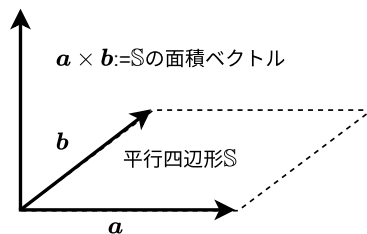


図 1.4 外積



## 外積

定義 8. 2つのベクトル  $\mathbf{a}$  と  $\mathbf{b}$  を両辺とする平行四辺形  $\mathcal{S}$  に対し, この平面で垂直かつ  $\mathbf{a}$  から  $\mathbf{b}$  へ最短で右ねじを回すときねじが進む方向を表とすると,  $\mathcal{S}$  の面積ベクトルを  $\mathbf{a}$  と  $\mathbf{b}$  の外積と呼び  $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$  で表す. なお

$$\mathbf{0} \times \mathbf{0} = \mathbf{0}, \quad \mathbf{0} \times \mathbf{a} = \mathbf{0}$$

と定める.

$\mathbf{a} = (a_x, a_y, a_z)$ ,  $\mathbf{b} = (b_x, b_y, b_z)$  のとき, 外積を成分で表せば

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \left( \begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_z & a_x \\ b_z & b_x \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix} \right) = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_x & \mathbf{e}_y & \mathbf{e}_z \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}$$

となる.

外積については, 次の法則が成り立つ.

1.  $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = -\mathbf{b} \times \mathbf{a}$
2.  $|\mathbf{a} \times \mathbf{b}| = |\mathbf{a}||\mathbf{b}| \sin \theta$
3.  $\alpha \mathbf{a} \times \mathbf{b} = \mathbf{a} \times \alpha \mathbf{b} = \alpha(\mathbf{a} \times \mathbf{b})$
4.  $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = \mathbf{a} \times \mathbf{b} + \mathbf{a} \times \mathbf{c}$
5.  $(\mathbf{b} + \mathbf{c}) \times \mathbf{a} = \mathbf{b} \times \mathbf{a} + \mathbf{c} \times \mathbf{a}$
6.  $\mathbf{a} \parallel \mathbf{b} \Leftrightarrow \mathbf{a} \times \mathbf{b} = \mathbf{0}$
7. 基本ベクトルに対して

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_x \times \mathbf{e}_y &= \mathbf{e}_z, & \mathbf{e}_y \times \mathbf{e}_z &= \mathbf{e}_x, & \mathbf{e}_z \times \mathbf{e}_x &= \mathbf{e}_y \\ \mathbf{e}_x \times \mathbf{e}_x &= \mathbf{0}, & \mathbf{e}_y \times \mathbf{e}_y &= \mathbf{0}, & \mathbf{e}_z \times \mathbf{e}_z &= \mathbf{0} \end{aligned}$$

## 【応用】

磁束密度  $\mathbf{b}$  の磁界中を速度  $\mathbf{v}$  で運動する点電荷  $q$  に働くローレンツ力は, ベクトルの外積を用いて

$$\mathbf{f} = q\mathbf{v} \times \mathbf{b}$$

で表せる.

## 1.2 空間における微分

## ベクトル値関数, 定ベクトル

定義 9. ベクトルの成分が, 変数  $u$  の関数

$$\mathbf{a}(u) = (a_x(u), a_y(u), a_z(u))$$

であるとき,  $\mathbf{a}(u)$  を  $u$  のベクトル値関数という. 変数に依存しないベクトルは定ベクトルという.

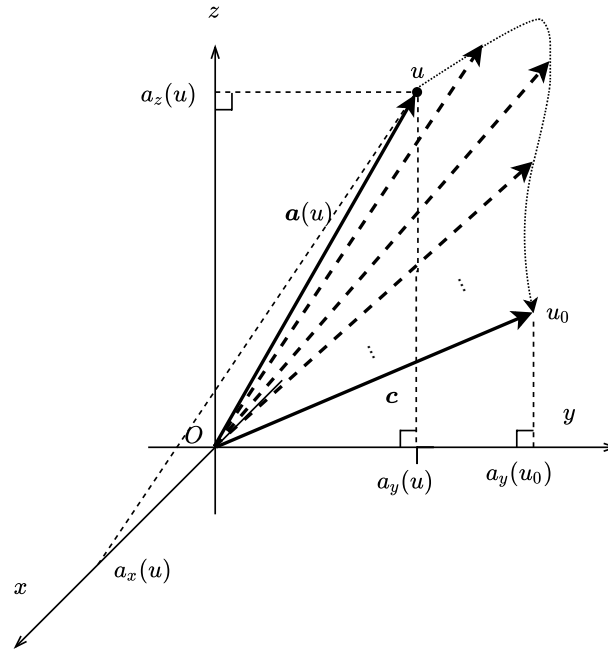


図 1.5 極限ベクトル

極限ベクトル, 連続

定義 10. ベクトル値関数  $\mathbf{a}(u)$  に対して, 定ベクトル  $\mathbf{c}$  が存在し

$$\lim_{u \rightarrow u_0} a_x(u) \rightarrow c_x, \quad \lim_{u \rightarrow u_0} a_y(u) \rightarrow c_y, \quad \lim_{u \rightarrow u_0} a_z(u) \rightarrow c_z$$

であれば  $\mathbf{c}$  を  $u \rightarrow u_0$  のときの極限ベクトルといい

$$\lim_{u \rightarrow u_0} \mathbf{a}(u) = \mathbf{c}$$

と表す. また,  $\lim_{u \rightarrow u_0} \mathbf{a}(u) = \mathbf{a}(u_0)$  のとき,  $\mathbf{a}(u)$  は  $u_0$  で連続であるといい, 成分の導関数が存在するとき, ベクトル値関数

$$\mathbf{a}'(u) = (a'_x(u), a'_y(u), a'_z(u))$$

を  $\mathbf{a}(u)$  の導関数という.

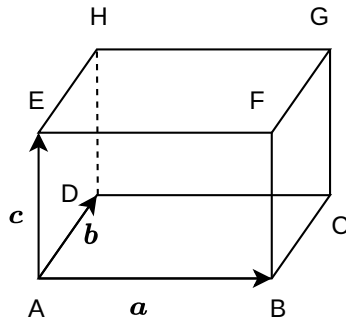
【性質】

1.  $\mathbf{c}' = \mathbf{0}$
2.  $[\mathbf{a}(u) + \mathbf{b}(u)]' = \mathbf{a}'(u) + \mathbf{b}'(u)$
3.  $[\alpha \mathbf{a}(u)]' = \alpha \mathbf{a}'(u)$
4.  $[\mathbf{c} \cdot \mathbf{a}(u)]' = \mathbf{c} \cdot \mathbf{a}'(u)$
5.  $[\mathbf{a}(u) \cdot \mathbf{b}(u)]' = \mathbf{a}'(u) \cdot \mathbf{b}(u) + \mathbf{a}(u) \cdot \mathbf{b}'(u)$

$$6. [\mathbf{a}(u) \times \mathbf{b}(u)]' = \mathbf{a}'(u) \times \mathbf{b}(u) + \mathbf{a}(u) \times \mathbf{b}'(u)$$

## 演習問題

1.  $\overrightarrow{BH}, \overrightarrow{DF}, \overrightarrow{FC}, \overrightarrow{FH}$  を  $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$  で表わせよ.



2. ベクトル  $\mathbf{a} = (-1, 0, 7)$  と  $\mathbf{b} = (-4, 5, 3)$  がなす角  $\theta$  を求めよ.  
 3.  $\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z$  それぞれとなす角が等しい単位ベクトルを求めよ.  
 4.  $\mathbf{a} = \overrightarrow{OA}, \mathbf{b} = \overrightarrow{OB}$  のとき,  $\mathbf{a} + \mathbf{b} = \overrightarrow{OC}$  をつくと, 平行四辺形  $OACB$  の面積  $S$  は

$$S = \sqrt{|\mathbf{a}|^2 |\mathbf{b}|^2 - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})^2}$$

となることを示せ.

5.  $\mathbf{a} = (1, 1, 1), \mathbf{b} = (1, 3, 5), \mathbf{c} = (1, 9, 25)$  を三辺とする平行六面体の体積を求めよ.  
 6. 頂点が  $\mathbf{a}(3, 1, 1), \mathbf{b}(-1, 3, -1), \mathbf{c}(1, -1, 4)$  となる三角形の面積ベクトルを求めよ.  
 7. ベクトル  $\mathbf{a} = (a_x, a_y, 0)$  と  $\mathbf{b} = (0, b_y, b_z)$  の外積を計算せよ.  
 8. ベクトル  $\mathbf{a}, \mathbf{b}$  について

$$(\mathbf{a} + \mathbf{b}) \times (\mathbf{a} - \mathbf{b}) = -2(\mathbf{a} \times \mathbf{b})$$

を示せ.

9. 電荷  $q$  の点電荷が速度  $\mathbf{v} = (v_x, 0, v_z)$  で磁束密度  $\mathbf{b} = (0, 0, b_z)$  の磁界で運動するとき, この点電荷に働くローレンツ力  $\mathbf{f}$  を求めよ.  
 10.  $\mathbf{a}(u) = (e^{-2u}, \ln(u^3 + 1), -\cos u)$  の  $u$  微分を求めよ.  
 11. 次の  $\mathbf{a}(u)$  に対し  $\mathbf{a}'(u), \mathbf{a}''(u)$  を求めよ.  
 (a)  $\mathbf{a}(u) = (u, u, \sqrt{1 - 2u^2})$   
 (b)  $\mathbf{a}(u) = (\tan 2u, \log(1 + u^2), e^{3u})$   
 12.  $\mathbf{a}(u) = (2u^3, u^2, u), \mathbf{b}(u) = (u, 0, 3u^2)$  のとき,  $(\mathbf{a}(u) \cdot \mathbf{b}(u))'$  及び  $(\mathbf{a}(u) \times \mathbf{b}(u))'$  を求めよ.  
 13.  $[\mathbf{a}(u) \times \mathbf{b}(u)]' = \mathbf{a}'(u) \times \mathbf{b}(u) + \mathbf{a}(u) \times \mathbf{b}'(u)$  を証明せよ.  
 14. 原点を中心として  $xy$  平面内で円運動する質点の時刻  $t$  における位置ベクトルが  $\mathbf{r}(t) = (r \cos \omega t, r \sin \omega t, 0)$  で与えられるとき, この質点の速度  $\mathbf{v}(t)$  と  $\mathbf{r}(t) \times \mathbf{v}(t)$  を求めよ.  
 15.  $\mathbf{r}(u) = (r_x(u), r_y(u), r_z(u)), r(u) = |\mathbf{r}(u)| \neq 0$  に対して, つぎの関係が成り立つことを示せ.

$$(a) \mathbf{r}(u) \cdot \mathbf{r}'(u) = r(u)r'(u)$$

$$(b) \frac{\mathbf{r}(u) \times (\mathbf{r}(u) \times \mathbf{r}'(u))}{r^3(u)} = - \left( \frac{\mathbf{r}(u)}{r(u)} \right)'$$

## 第2章

# スカラー場とベクトル場

スカラー場, ベクトル場

定義 11. 平面または空間の領域  $\mathcal{V}$  において,  $\mathcal{V}$  内の各点  $a$  にスカラー値  $f(a)$  が対応付けられているとき,  $\mathcal{V}$  をスカラー場といい, ベクトル値  $f(a)$  が対応付けられているとき,  $\mathcal{V}$  をベクトル場という.

- 例 1.   • スカラー場の例: 気温, 気圧, 温度, 人口密度  
           • ベクトル場の例: 海流, 電場, 磁場

### 2.1 勾配ベクトル

勾配ベクトル

定義 12. スカラー場  $f(x, y, z)$  に対して, 偏導関数を成分にもつベクトル

$$\nabla f = \left( \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z} \right)$$

をスカラー場  $f(x, y, z)$  の勾配ベクトルという. ここで, 偏導関数をつくる作用  $\nabla = \left( \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right)$  は, ナブラと呼び, ハミルトンの演算子という.

勾配ベクトルはグラディエントとも呼ばれ, スカラー場  $f$  の勾配ベクトルは  $\text{grad } f$  とも表す.

例 2. スカラー場

$$f(x, y, z) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$

の勾配を計算せよ.

【回答】

$$\frac{\partial f}{\partial x} = -\frac{1}{2}(x^2 + y^2 + z^2)^{-\frac{3}{2}}2x = -(x^2 + y^2 + z^2)^{-\frac{3}{2}}x$$

同様に

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial y} &= -(x^2 + y^2 + z^2)^{-\frac{3}{2}}y \\ \frac{\partial f}{\partial z} &= -(x^2 + y^2 + z^2)^{-\frac{3}{2}}z\end{aligned}$$

より

$$\nabla f = -(x^2 + y^2 + z^2)^{-\frac{3}{2}}(x, y, z)$$

である. また,  $\mathbf{r} = (x, y, z) = x\mathbf{e}_x + y\mathbf{e}_y + z\mathbf{e}_z$ ,  $|\mathbf{r}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = r$  とおくと

$$\nabla f = -\underbrace{(x^2 + y^2 + z^2)^{-\frac{3}{2}}}_{\frac{1}{r^3}} \underbrace{(x, y, z)}_{\mathbf{r}}$$

より,  $\nabla f = -\frac{\mathbf{r}}{r^3}$  と書ける.

【性質】

スカラー場  $f(x, y, z)$  および  $g(x, y, z)$  に対して, 演算子  $\nabla$  は次の計算規則が成り立つ.

1.  $\nabla(\alpha f + \beta g) = \alpha \nabla f + \beta \nabla g$   $\alpha, \beta$  は定数
2.  $\nabla(fg) = (\nabla f)g + f(\nabla g)$
3.  $\nabla\left(\frac{f}{g}\right) = \frac{(\nabla f)g - f(\nabla g)}{g^2}$
4.  $\nabla(h(f)) = h'(f)\nabla f$   $h$  は  $f$  のスカラー値関数

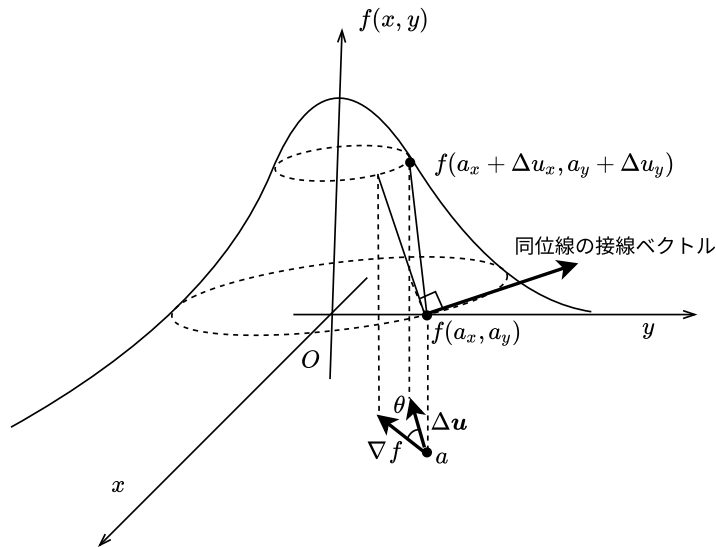


図 2.1 方向微分係数と勾配ベクトル

## 2.1.1 勾配の意味

方向微分係数

定義 13. スカラー場  $f(x, y, z)$  において, 点  $a = (a_x, a_y, a_z)$  を通る単位ベクトル  $\mathbf{u} = (u_x, u_y, u_z)$  を定め, その方向での傾斜

$$f'(\mathbf{u}) = \lim_{\Delta u \rightarrow 0} \frac{f(a_x + \Delta u_x, a_y + \Delta u_y, a_z + \Delta u_z) - f(a_x, a_y, a_z)}{\Delta u}$$

をスカラー場  $f(x, y, z)$  の点  $a$  における  $\mathbf{u}$  方向への方向微分係数という.

スカラー場  $f(x, y, z)$  において

$$\begin{aligned} f'(\mathbf{u}) &= \frac{\partial f}{\partial x} x'(u) + \frac{\partial f}{\partial y} y'(u) + \frac{\partial f}{\partial z} z'(u) \\ &= \nabla f \cdot (x'(u), y'(u), z'(u)) \end{aligned}$$

となるが, ここで

$$(x'(u), y'(u), z'(u)) = \left( \frac{du_x}{du}, \frac{du_y}{du}, \frac{du_z}{du} \right) = \frac{d\mathbf{u}}{du} = \mathbf{u}$$

であるので, 方向微分係数は

$$f'(\mathbf{u}) = \nabla f \cdot \mathbf{u}$$

勾配と定めたベクトル  $\mathbf{u}$  の内積で表せる. 従って,  $\nabla f$  と  $\mathbf{u}$  がなす角度を  $\theta$  とおくと

$$f'(\mathbf{u}) = |\nabla f| |\mathbf{u}| \cos \theta$$

$\theta = 0$  , すなわち  $u$  を  $\nabla f$  と同じ向きに取るときに方向微分係数が最大となる .

等位曲線 , 等位面

定義 14. 空間のスカラー場  $f(x, y, z)$  において ,  $f(x, y, z) = \alpha$  ( $\alpha$  は定数) を満たすの曲面を等位面という . 平面のスカラー場の場合 , 一般に一つの曲線となり等位線という .

スカラー場  $f(x, y, z)$  にある同位面  $f(x, y, z) = \alpha$  上の点において , 同位面上のベクトル  $u$  を定めると  $u$  は微分点における接線の方向ベクトルとなり , その方向での微分係数を求めると , 右辺は定数であるので

$$f'(u) = \nabla f \cdot u = 0$$

が成り立ち ,  $\nabla f$  は接線に垂直な法線ベクトルとなり , スカラー場  $f(x, y, z)$  がもっとも増加する向きである .

## 2.2 ベクトル場の発散

発散

定義 15. ベクトル場  $f(x, y, z) = (f_x(x, y, z), f_y(x, y, z), f_z(x, y, z))$  に対して , スカラー値関数

$$\nabla \cdot \mathbf{f} = \frac{\partial f_x}{\partial x} + \frac{\partial f_y}{\partial y} + \frac{\partial f_z}{\partial z}$$

をベクトル場  $f(x, y, z)$  の発散という .

ベクトル場  $f(x, y, z)$  の発散はダイバージェンスといい ,  $\operatorname{div} f$  で表すこともある .

例 3. ベクトル場  $f(x, y, z) = \frac{xyz}{6}(x, y, z)$  の発散を計算せよ .

【回答】

発散の定義より

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{f} &= \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{x^2yz}{6} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{xy^2z}{6} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{xyz^2}{6} \right) \\ &= \frac{xyz}{3} + \frac{xyz}{3} + \frac{xyz}{3} \\ &= xyz \end{aligned}$$

勾配がスカラー場からベクトル場への演算であるに対し , 発散はベクトル場からスカラー場への演算である . その故にスカラー場  $f(x, y, z) = \frac{xyz}{6}(x + y + z)$  が与えられたとき ,  $f(x, y, z)$  の勾配は

$$\begin{aligned} \nabla f &= \left( \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{x^2yz}{6} \right), \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{xy^2z}{6} \right), \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{xyz^2}{6} \right) \right) \\ &= \left( \frac{xyz}{3}, \frac{xyz}{3}, \frac{xyz}{3} \right) \end{aligned}$$

となる .



## 【性質】

1.  $\nabla \cdot (\alpha \mathbf{f} + \beta \mathbf{g}) = \alpha \nabla \cdot \mathbf{f} + \beta \nabla \cdot \mathbf{g}$  ( $\alpha, \beta$  は定数)
2. スカラー値関数  $f(x, y, z)$  に対して

$$\nabla \cdot (f\mathbf{g}) = \nabla f \cdot \mathbf{g} + f \nabla \cdot \mathbf{g}$$

## 2.2.1 発散の意味

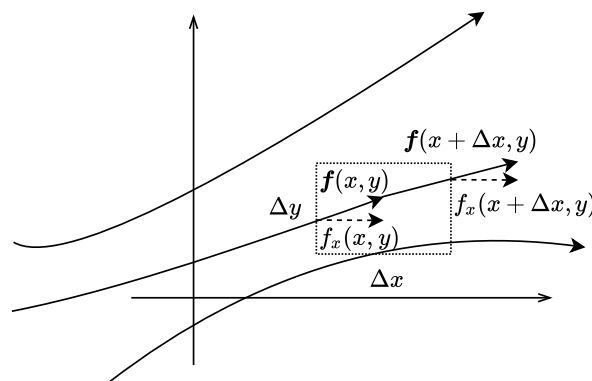


図 2.2 平面ベクトル場の発散

平面のベクトル場  $f(x, y)$  で示される熱の流れのベクトル場があるとする．1辺の長さが  $\Delta x, \Delta y$  の長方形をつくると， $\Delta y$  の辺から入る熱量は  $f_x \Delta y$  であり， $\Delta y$  の辺から出る熱量は  $f_x(x + \Delta x, y) \Delta y$  である．よって  $y$  軸方向の熱量の出入りは

$$[f_x(x + \Delta x, y) - f_x(x, y)] \Delta y \approx \frac{\partial f_x}{\partial x} \Delta x \Delta y$$

である．同様に  $x$  軸方向には  $\frac{\partial f_y}{\partial y} \Delta x \Delta y$  だけ出入りがあるので，単位面積当たりの熱量の出入りが  $\nabla \cdot f$  となる．

## 2.2.2 ラプラシアン

## ラプラシアン

定義 16. 演算子

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

をラプラシアンもしくはラプラス演算子と呼ぶ．

スカラー場  $f(x, y, z)$  が与えられたとき,  $f(x, y, z)$  の勾配の発散を求めると

$$\begin{aligned}\nabla \cdot (\nabla f) &= \nabla \cdot \left( \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z} \right) \\ &= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} \\ &= \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) f \\ &= \nabla^2 f\end{aligned}$$

で表す.

## 2.3 ベクトル場の回転

回転

定義 17. ベクトル場  $\mathbf{f}(x, y, z) = (f_x(x, y, z), f_y(x, y, z), f_z(x, y, z))$  に対して

$$\nabla \times \mathbf{f} := \left( \frac{\partial f_z}{\partial y} - \frac{\partial f_y}{\partial z}, \frac{\partial f_x}{\partial z} - \frac{\partial f_z}{\partial x}, \frac{\partial f_y}{\partial x} - \frac{\partial f_x}{\partial y} \right)$$

これをベクトル場  $\mathbf{f}(x, y, z)$  の回転という.

回転はローテーションもしくはカールと呼ぶこともあり, それぞれ  $\text{rot } \mathbf{f}$  もしくは  $\text{curl } \mathbf{f}$  で表す.

空間の基本ベクトルを  $\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z$  とすると回転は

$$\nabla \times \mathbf{f} = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_x & \mathbf{e}_y & \mathbf{e}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ f_x & f_y & f_z \end{vmatrix}$$

で表せる.

例 4. ベクトル場  $\mathbf{f}(x, y, z) = \frac{xyz}{6}(x, y, z)$  の回転を計算せよ.

【回答】

定義より

$$\begin{aligned}\nabla \times \mathbf{f} &= \begin{vmatrix} \mathbf{e}_x & \mathbf{e}_y & \mathbf{e}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{x^2yz}{6} & \frac{xy^2z}{6} & \frac{xyz^2}{6} \end{vmatrix} \\ &= \left( \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{xyz^2}{6} \right) - \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{xy^2z}{6} \right), \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{x^2yz}{6} \right) - \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{xyz^2}{6} \right), \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{xy^2z}{6} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{x^2yz}{6} \right) \right) \\ &= \left( \frac{x(z^2 - y^2)}{6}, \frac{y(x^2 - z^2)}{6}, \frac{z(y^2 - x^2)}{6} \right)\end{aligned}$$

## 【性質】

回転について次の性質が成り立つ .

1.  $\nabla \times (\alpha \mathbf{f} + \beta \mathbf{g}) = \alpha \nabla \times \mathbf{f} + \beta \nabla \times \mathbf{g}$
2. スカラー場  $f(x, y, z)$  とベクトル場  $\mathbf{g}(x, y, z)$  に対し

$$\nabla \times (f\mathbf{g}) = \nabla f \times \mathbf{g} + f(\nabla \times \mathbf{g})$$

## 2.3.1 回転の意味

回転はベクトル場での渦巻きの流速ベクトルを表す . 図 2.3 で示したように , 空間のベクトル場

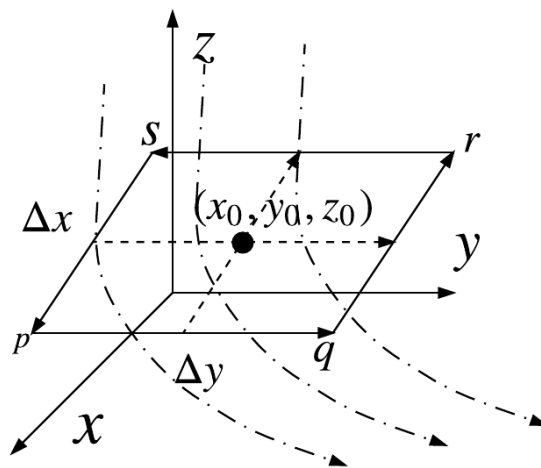


図 2.3 長方形渦の大きさ

$f(x, y, z)$  で法線ベクトルが  $z$  軸の正の方向と一致する有向平面において , 中心の座標が  $(x_0, y_0, z_0)$  で ,  $x$  軸と  $y$  軸で長さがそれぞれ  $\Delta x$  と  $\Delta y$  となる長方形  $C$  があるとする . この長方形  $C$  での渦の大きさは

$$\begin{aligned} & f_y(x_0 + \Delta x/2, y_0, z_0)\Delta y - f_x(x_0, y_0 + \Delta y/2, z_0)\Delta x \\ & - f_y(x_0 - \Delta x/2, y_0, z_0)\Delta y + f_x(x_0, y_0 - \Delta y/2, z_0)\Delta x \\ = & (f_y(x_0 + \Delta x/2, y_0, z_0) - f_y(x_0 - \Delta x/2, y_0, z_0))\Delta y \\ & - (f_x(x_0, y_0 + \Delta y/2, z_0) - f_x(x_0, y_0 - \Delta y/2, z_0))\Delta x \\ = & \left( \frac{f_y(x_0 + \Delta x/2, y_0, z_0) - f_y(x_0 - \Delta x/2, y_0, z_0)}{\Delta x} \right) \Delta x \Delta y \\ & - \left( \frac{f_x(x_0, y_0 + \Delta y/2, z_0) - f_x(x_0, y_0 - \Delta y/2, z_0)}{\Delta y} \right) \Delta x \Delta y \\ \approx & \left( \frac{\partial f_y}{\partial x} - \frac{\partial f_x}{\partial y} \right) \Delta x \Delta y \\ = & (\nabla \times \mathbf{f})_z \Delta x \Delta y \end{aligned}$$

なお , 符号が負になる項は  $f_x > 0, f_y > 0$  となる位置で ,  $C$  上の渦の方向と  $f_x$  もしくは  $f_y$  の方向が反対であるためである .

表 2.1 勾配, 発散と回転のまとめ

|    | 勾配   | 発散  | 回転   |
|----|--|---|--|
| 記号 | $\nabla f$   | $\nabla \cdot \mathbf{f}$   | $\nabla \times \mathbf{f}$   |
| 写像 | スカラー $\mapsto$ ベクトル  | ベクトル $\mapsto$ スカラー   | ベクトル $\mapsto$ ベクトル  |
| 定義 | $\left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}\right)$ | $\frac{\partial f_x}{\partial x} + \frac{\partial f_y}{\partial y} + \frac{\partial f_z}{\partial z}$ | $\left(\frac{\partial f_z}{\partial y} - \frac{\partial f_y}{\partial z}, \frac{\partial f_x}{\partial z} - \frac{\partial f_z}{\partial x}, \frac{\partial f_y}{\partial x} - \frac{\partial f_x}{\partial y}\right)$ |
| 意味 | $f$ が最も増加する方向  | 単位面積あたりの熱の出入  | 渦巻きの流速   |

## 2.4 ナブラを含む微分演算の公式とその応用

三つのベクトル  $f, g, h$  に対して, 内積と外積のあり得る四通り組み合わせに対して以下の等式が成り立つ。

三つのベクトルの積演算

1.  $(\mathbf{f} \times \mathbf{g}) \cdot \mathbf{h} = (\mathbf{h} \times \mathbf{f}) \cdot \mathbf{g} = (\mathbf{g} \times \mathbf{h}) \cdot \mathbf{f}$
2.  $\mathbf{f} \cdot (\mathbf{g} \times \mathbf{h}) = \mathbf{h} \cdot (\mathbf{f} \times \mathbf{g}) = \mathbf{g} \cdot (\mathbf{h} \times \mathbf{f})$
3.  $(\mathbf{f} \times \mathbf{g}) \times \mathbf{h} = (\mathbf{f} \cdot \mathbf{h})\mathbf{g} - (\mathbf{g} \cdot \mathbf{h})\mathbf{f}$
4.  $\mathbf{f} \times (\mathbf{g} \times \mathbf{h}) = (\mathbf{f} \cdot \mathbf{h})\mathbf{g} - (\mathbf{f} \cdot \mathbf{g})\mathbf{h}$

また、 $\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right)$  は微分演算子であるので, 関数  $f, g$  の積の微分の公式

$$(f(x)g(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

より

ナブラとスカラー関数を含む積演算

5.  $\nabla(fg) = g\nabla f + f\nabla g$
6.  $\nabla \cdot (fg) = (\nabla f) \cdot \mathbf{g} + f(\nabla \cdot \mathbf{g})$
7.  $\nabla \times (fg) = (\nabla f) \times \mathbf{g} + f(\nabla \times \mathbf{g})$

が成り立つことも容易に導ける。

ナブラとベクトル関数を含む積演算

8.  $\nabla(\mathbf{f} \cdot \mathbf{g}) = (\mathbf{g} \cdot \nabla)\mathbf{f} + (\mathbf{f} \cdot \nabla)\mathbf{g} + \mathbf{f} \times (\nabla \times \mathbf{g}) + \mathbf{g} \times (\nabla \times \mathbf{f})$
9.  $\nabla \cdot (\mathbf{f} \times \mathbf{g}) = (\nabla \times \mathbf{f}) \cdot \mathbf{g} - (\nabla \times \mathbf{g}) \cdot \mathbf{f}$
10.  $\nabla \times (\mathbf{f} \times \mathbf{g}) = (\nabla \cdot \mathbf{g})\mathbf{f} - (\nabla \cdot \mathbf{f})\mathbf{g} + (\mathbf{g} \cdot \nabla)\mathbf{f} - (\mathbf{f} \cdot \nabla)\mathbf{g}$

【式 8 の証明】

ここでは, 左辺と右辺の  $x$  成分が同じであることを証明するが,  $y$  と  $z$  成分も同じである。定義により

$$\mathbf{f} \cdot \nabla = f_x \frac{\partial}{\partial x} + f_y \frac{\partial}{\partial y} + f_z \frac{\partial}{\partial z}$$

なので、右辺の第1,2項の  $x$  成分は

$$\left( f_x \frac{\partial g_x}{\partial x} + f_y \frac{\partial g_x}{\partial y} + f_z \frac{\partial g_x}{\partial z} \right) + \left( g_x \frac{\partial f_x}{\partial x} + g_y \frac{\partial f_x}{\partial y} + g_z \frac{\partial f_x}{\partial z} \right)$$

である。また、第3,4項の  $x$  成分は

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} g_y & g_z \\ \frac{\partial f_x}{\partial z} - \frac{\partial f_z}{\partial x} & \frac{\partial f_y}{\partial x} - \frac{\partial f_x}{\partial y} \end{vmatrix} &= g_y \left( \frac{\partial f_y}{\partial x} - \frac{\partial f_x}{\partial y} \right) - g_z \left( \frac{\partial f_x}{\partial z} - \frac{\partial f_z}{\partial x} \right) \\ \begin{vmatrix} f_y & f_z \\ \frac{\partial g_x}{\partial z} - \frac{\partial g_z}{\partial x} & \frac{\partial g_y}{\partial x} - \frac{\partial g_x}{\partial y} \end{vmatrix} &= f_y \left( \frac{\partial g_y}{\partial x} - \frac{\partial g_x}{\partial y} \right) - f_z \left( \frac{\partial g_x}{\partial z} - \frac{\partial g_z}{\partial x} \right) \end{aligned}$$

であるので、右辺の和は

$$\begin{aligned} &\left( f_x \frac{\partial g_x}{\partial x} + g_x \frac{\partial f_x}{\partial x} \right) + \left( f_y \frac{\partial g_y}{\partial x} + g_y \frac{\partial f_y}{\partial x} \right) + \left( f_z \frac{\partial g_z}{\partial x} + g_z \frac{\partial f_z}{\partial x} \right) \\ &= \frac{\partial}{\partial x} (f_x g_x + f_y g_y + f_z g_z) \end{aligned}$$

で表せる。これは、左辺

$$\nabla(\mathbf{f} \cdot \mathbf{g}) = \left( \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right) (f_x g_x + f_y g_y + f_z g_z)$$

の  $x$  成分と一致する。

【式9の証明】

関数の積の微分公式により

$$\nabla \cdot (\mathbf{f} \times \mathbf{g}) = \nabla_{\mathbf{f}} \cdot (\mathbf{f} \times \mathbf{g}) + \nabla_{\mathbf{g}} \cdot (\mathbf{f} \times \mathbf{g})$$

が成り立つが、 $\nabla_{\mathbf{f}}$  と  $\nabla_{\mathbf{g}}$  はそれぞれ  $\mathbf{f}$  と  $\mathbf{g}$  に対する微分を表す。一方、性質2より

$$\begin{aligned} \nabla_{\mathbf{f}} \cdot (\mathbf{f} \times \mathbf{g}) &= \mathbf{g} \cdot (\nabla \times \mathbf{f}) \\ \nabla_{\mathbf{g}} \cdot (\mathbf{f} \times \mathbf{g}) &= -\mathbf{f} \cdot (\nabla \times \mathbf{g}) \end{aligned}$$

が成り立つので

$$\nabla \cdot (\mathbf{f} \times \mathbf{g}) = (\nabla \times \mathbf{f}) \cdot \mathbf{g} - \mathbf{f} \cdot (\nabla \times \mathbf{g})$$

である。

【式10の証明】

関数の積の微分公式により

$$\nabla \times (\mathbf{f} \times \mathbf{g}) = \nabla_{\mathbf{f}} \times (\mathbf{f} \times \mathbf{g}) + \nabla_{\mathbf{g}} \times (\mathbf{f} \times \mathbf{g})$$

が成り立つ。

一方、性質4より

$$\begin{aligned} \nabla_{\mathbf{f}} \times (\mathbf{f} \times \mathbf{g}) &= (\mathbf{g} \cdot \nabla) \mathbf{f} - \mathbf{g} (\nabla \cdot \mathbf{f}) \\ \nabla_{\mathbf{g}} \times (\mathbf{f} \times \mathbf{g}) &= \mathbf{f} (\nabla \cdot \mathbf{g}) - (\mathbf{f} \cdot \nabla) \mathbf{g} \end{aligned}$$

が成り立つので式10となる。

二つのナブラを含む積演算

11.  $\nabla \cdot (\nabla f) = \nabla^2 f$
12.  $\nabla \times (\nabla f) = \mathbf{0}$
13.  $\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{f}) = 0$
14.  $\nabla \times (\nabla \times \mathbf{f}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{f}) - \nabla^2 \mathbf{f}$

ただし、

$$\nabla^2 \mathbf{f} := \left( \frac{\partial^2 f_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f_x}{\partial z^2}, \frac{\partial^2 f_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f_y}{\partial z^2}, \frac{\partial^2 f_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f_z}{\partial z^2} \right)$$

である。

【式 14 の証明】

右辺の  $x$  成分は

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial f_x}{\partial x} + \frac{\partial f_y}{\partial y} + \frac{\partial f_z}{\partial z} \right) - \left( \frac{\partial^2 f_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f_x}{\partial z^2} \right) \\ &= \frac{\partial^2 f_y}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 f_z}{\partial x \partial z} - \frac{\partial^2 f_x}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 f_x}{\partial z^2} \\ &= \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial f_y}{\partial x} - \frac{\partial f_x}{\partial y} \right) - \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial f_x}{\partial z} - \frac{\partial f_z}{\partial x} \right) \end{aligned}$$

同じく  $y$  成分と  $z$  成分はそれぞれ

$$\frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial f_z}{\partial y} - \frac{\partial f_y}{\partial z} \right) - \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial f_y}{\partial x} - \frac{\partial f_x}{\partial y} \right)$$

および

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial f_x}{\partial z} - \frac{\partial f_z}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial f_z}{\partial y} - \frac{\partial f_y}{\partial z} \right)$$

である。従って、右辺の和は

$$\begin{vmatrix} \mathbf{e}_x & \mathbf{e}_y & \mathbf{e}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \left( \frac{\partial f_z}{\partial y} - \frac{\partial f_y}{\partial z} \right) & \left( \frac{\partial f_x}{\partial z} - \frac{\partial f_z}{\partial x} \right) & \left( \frac{\partial f_y}{\partial x} - \frac{\partial f_x}{\partial y} \right) \end{vmatrix} = \nabla \times (\nabla \times \mathbf{f})$$

で表せる。

例 5. 電荷も電流も存在しない真空中における電場  $\mathbf{E}$ 、磁場  $\mathbf{B}$  の関係は次のような方程式で与えられる。

$$\nabla \times \mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \mathbf{0} \quad (2.1)$$

$$\nabla \times \mathbf{B} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \mathbf{0} \quad (2.2)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 0 \quad (2.3)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (2.4)$$

ただし、 $c$  は定数である。これらから三次元波動方程式

$$\begin{cases} \nabla^2 \mathbf{E} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} \\ \nabla^2 \mathbf{B} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{B}}{\partial t^2} \end{cases} \quad (2.5)$$

を導け。

【回答例】

式 (2.1) の第二項を右辺に移項し、両辺に回転をかけると

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{E}) = -\nabla \times \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

を得る。左辺には性質 14 を適応し、右辺は微分の順番を交換すると

$$\nabla(\nabla \cdot \mathbf{E}) - \nabla^2 \mathbf{E} = -\frac{\partial}{\partial t}(\nabla \times \mathbf{B})$$

となる。式 (2.3) より、 $\nabla(\nabla \cdot \mathbf{E}) = 0$  となり、また (2.2) より  $\frac{\partial}{\partial t}(\nabla \times \mathbf{B}) = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2}$  が得られるので

$$\nabla^2 \mathbf{E} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2}$$

である。

同じように式 (2.2) の第二項を右辺に移項し、両辺に回転をかけ

$$\nabla(\nabla \cdot \mathbf{B}) - \nabla^2 \mathbf{B} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial}{\partial t}(\nabla \times \mathbf{E})$$

が得られ、式 (2.4) 及び (2.1) より

$$\nabla^2 \mathbf{B} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{B}}{\partial t^2}$$

となる。

## 演習問題

- ベクトル場  $\mathbf{r}(x, y, z) = (x, y, z)$  に対して、 $r = |\mathbf{r}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \neq 0$  とおき、次の値を  $r$ ,  $\mathbf{r}$ ,  $f(r)$ ,  $f'(r)$  および  $f''(r)$  を用いて表わせよ。
  - $\nabla f(r)$
  - $\nabla \cdot [f(r)\mathbf{r}]$
  - $\nabla^2 f(r)$
- $\mathbf{r} = (x, y, z)$ ,  $r = |\mathbf{r}| \neq 0$  において、次の問に答えよ。

(a) スカラー場

$$f(\mathbf{r}) = \frac{1}{r^2}$$

の勾配を求めよ。

(b) ベクトル場

$$\mathbf{f}(\mathbf{r}) = \frac{\mathbf{r}}{r^3}$$

の発散を求めよ。

(c)  $\alpha, \beta$  を定ベクトルとし

$$\alpha e^{j\beta \cdot \mathbf{r}}$$

の回転を求めよ。

3. スカラー場  $f(x, y, z) = 2xy^2 - x^3z^2$  に対して,  $\nabla \times (\nabla f)$  を求めよ。4.  $\mathbf{f} = (xy^2, 2y^2z, 3yz^2)$ ,  $g = xy^2z$  のとき, 次の式を計算せよ。(a)  $\nabla \cdot \mathbf{f}$ (b)  $\mathbf{f} \cdot \nabla g$ (c)  $\nabla \cdot (\nabla g)$ 5. スカラー場  $f(x, y, z)$  と  $g(x, y, z)$  に対して,  $\nabla \cdot (\nabla f \times \nabla g) = 0$  を証明せよ。6.  $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$  とするとき, 次の式を  $r$  を用いて表わせよ。(a)  $\nabla^2 \ln r$ (b)  $\nabla^2 r^n$  ( $n$  は整数)7.  $\mathbf{f} = (x, y, z)$ ,  $\mathbf{g} = (x^2, y, 0)$  とし, 性質 8

$$\nabla(\mathbf{f} \cdot \mathbf{g}) = (\mathbf{g} \cdot \nabla)\mathbf{f} + (\mathbf{f} \cdot \nabla)\mathbf{g} + \mathbf{f} \times (\nabla \times \mathbf{g}) + \mathbf{g} \times (\nabla \times \mathbf{f})$$

が成り立つことを確かめよ。

8.  $\mathbf{f} = (y, -x, z)$ ,  $\mathbf{g} = (y^2, x, 0)$  とし, 性質 10

$$\nabla \times (\mathbf{f} \times \mathbf{g}) = (\mathbf{g} \cdot \nabla)\mathbf{f} - (\mathbf{f} \cdot \nabla)\mathbf{g} + \mathbf{f}(\nabla \cdot \mathbf{g}) - \mathbf{g}(\nabla \cdot \mathbf{f})$$

が成り立つことを示せ。

9. スカラー値関数  $f, g$  に対して,  $\mathbf{h} = f\nabla g$  とおくと,  $\mathbf{h} \cdot (\nabla \times \mathbf{h}) = 0$  が成り立つことを示せ。

10. 次の等式が成り立たないことを示す反例を挙げよ。

(a)  $\nabla \times (\mathbf{f} \times \mathbf{g}) = (\nabla \cdot \mathbf{g})\mathbf{f} - (\nabla \cdot \mathbf{f})\mathbf{g}$ (b)  $\nabla \cdot (\mathbf{f} \times \mathbf{g}) = \mathbf{g} \cdot (\nabla \times \mathbf{f})$ 11.  $\alpha$  を定ベクトルとしたとき,  $\mathbf{r} = (x, y, z)$ ,  $r = |\mathbf{r}| \neq 0$  に対して, つぎの関係が成り立つことを示せ。(a)  $\nabla \times (\alpha \times \mathbf{r}) = 2\alpha$ (b)  $\nabla \times \left( \frac{\alpha \times \mathbf{r}}{r^2} \right) = \frac{2(\mathbf{r} \cdot \alpha)}{r^4} \mathbf{r}$ 12.  $\nabla \cdot \mathbf{f} = 0$  である場合

$$g_x = \int_0^z f_y(x, y, w)dw - \int_0^y \left( f_z(x, v, z) - \int_0^z \frac{\partial f_z(x, v, z)}{\partial z} \Big|_{z=w} dw \right) dv$$



$$\begin{aligned}g_y &= - \int_0^z f_x(x, y, w) dw \\g_z &= 0\end{aligned}$$

とおくと,  $\nabla \times \mathbf{g} = \mathbf{f}$  となることを示せ.

## 第3章

# 空間上の積分

### 3.1 線積分

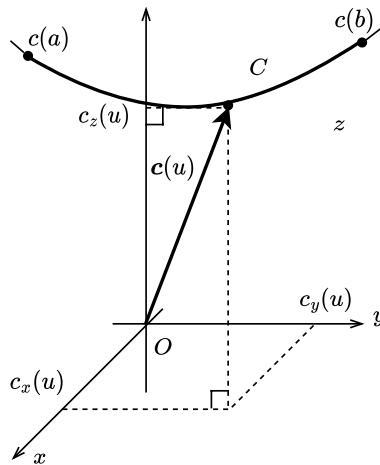


図 3.1 空間曲線

#### 空間曲線

定義 18. 空間上の点  $c$  の位置ベクトルが変数  $u$  の関数として

$$\mathbf{c}(u) = (c_x(u), c_y(u), c_z(u)) \quad (3.1)$$

であるとき, 変数  $u$  の変化区間  $a \leq u \leq b$  での  $c$  の軌跡は

$$C : (\mathbf{c}(u))_{u=a}^b = (c_x(u), c_y(u), c_z(u))_{u=a}^b$$

空間曲線となり, 式 (3.1) を空間曲線の方程式という.

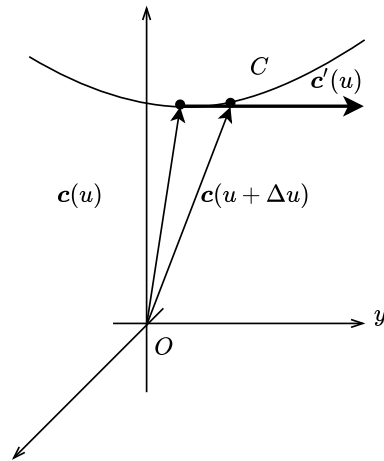


図 3.2 接ベクトル

接ベクトル 空間曲線  $C$  の接ベクトルは

$$\lim_{\Delta u \rightarrow 0} \frac{\Delta C}{\Delta u} = \lim_{\Delta u \rightarrow 0} \frac{\mathbf{c}(u + \Delta u) - \mathbf{c}(u)}{\Delta u} = \mathbf{c}'(u) = (c'_x(u), c'_y(u), c'_z(u)) \quad (3.2)$$

で与えられる。

弧長 空間曲線  $C$  の微小な接ベクトル  $d\mathbf{c}$  の長さ  $dC$  は

$$dC = |d\mathbf{c}(u)| = |\mathbf{c}'(u)du| = |\mathbf{c}'(u)| du \quad (3.3)$$

となるので、 $a \leq u \leq b$  で変化するときの弧長は

$$\int_C dC = \int_C |d\mathbf{c}(u)| = \int_a^b |\mathbf{c}'(u)| du$$

で与えられる。

### 3.1.1 スカラー場の線積分

#### 線積分

定義 19. 空間のスカラー場  $f(x, y, z)$  において、空間曲線  $C : (\mathbf{c}(u))_{u=a}^b$  が与えられたとき

$$\begin{aligned} \int_C f(C) dC &= \int_C f(\mathbf{c}(u)) |d\mathbf{c}(u)| \\ &= \int_a^b f(\mathbf{c}(u)) |\mathbf{c}'(u)| du \\ &= \int_a^b f(c_x(u), c_y(u), c_z(u)) \sqrt{(c'_x(u))^2 + (c'_y(u))^2 + (c'_z(u))^2} du \end{aligned}$$

を曲線  $C$  に沿っての  $f$  の線積分とよぶ。

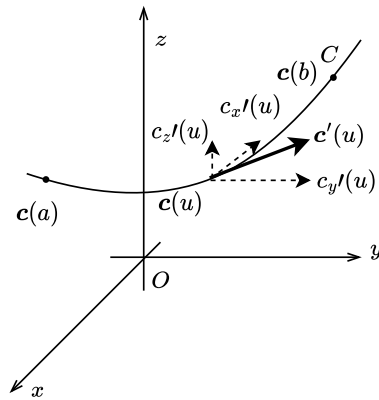


図 3.3 スカラー場の線積分

例 6.  $f(x, y, z) = x^2yz$ ,  $C : \left(u, \frac{u^2}{2}, \frac{u^3}{6}\right)_{u=0}^1$  とすると

$$\sqrt{(c'_x(u))^2 + (c'_y(u))^2 + (c'_z(u))^2} = \sqrt{1^2 + u^2 + \left(\frac{u^2}{2}\right)^2} = \frac{u^2 + 2}{2}$$

より

$$\int_C f dC = \int_0^1 \frac{u^7}{12} \cdot \frac{u^2 + 2}{2} du = \frac{7}{480}$$

である。

### 3.1.2 ベクトル場の接線線積分

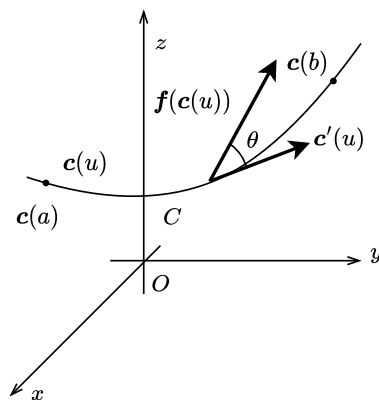


図 3.4 ベクトル場の線積分

## 接線線積分

定義 20. ベクトル場  $f(x, y, z)$  において, 空間曲線  $C : (\mathbf{c}(u))_{u=a}^b$  が与えられたとき, ベクトル  $f(x, y, z)$  と  $d\mathbf{c}(u)$  との内積の  $C$  に沿っての線積分

$$\int_C \mathbf{f}(\mathbf{c}(u)) \cdot d\mathbf{c}(u)$$

をベクトル場  $f$  の曲線  $C$  に沿っての接線線積分と呼ぶ. 式 (3.2) の曲線  $C$  単位接ベクトル  $\mathbf{c}'(u)$  を用いると, 接線線積分は

$$\int_C \mathbf{f}(\mathbf{c}(u)) \cdot d\mathbf{c}(u) = \int_a^b \mathbf{f}(\mathbf{c}(u)) \cdot \mathbf{c}'(u) du$$

で表せる.

例 7.  $C : (a \cos \theta, a \sin \theta, b\theta)_{\theta=0}^{\pi}$  のとき, ベクトル場  $f(x, y, z) = (y, -z, x)$  の接線線積分を求めよ.

【回答】

$$\begin{cases} (a \cos \theta)' &= -a \sin \theta \\ (a \sin \theta)' &= a \cos \theta \\ (b\theta)' &= b \end{cases}$$

より

$$\begin{aligned} \int_C \mathbf{f}(C) \cdot d\mathbf{c}(u) &= \int_C \mathbf{f}(\mathbf{c}(u)) \cdot \mathbf{c}'(u) du \\ &= \int_0^{\pi} (a \sin \theta, -b\theta, a \cos \theta) \cdot (-a \sin \theta, a \cos \theta, b) d\theta \\ &= \int_0^{\pi} [a \sin \theta \cdot (-a \sin \theta) - b\theta \cdot a \cos \theta + a \cos \theta \cdot b] d\theta \\ &= \int_0^{\pi} (-a^2 \sin^2 \theta - ab\theta \cos \theta + ab \cos \theta) d\theta \\ &= -\frac{\pi a^2}{2} + 2ab \end{aligned}$$

【性質】

スカラー値関数  $f(x, y, z)$  の勾配ベクトル  $\nabla f$  の接線線積分は, 曲線  $C$  の始点を  $a$ , 終点を  $b$  とすると

$$\begin{aligned} \int_C \nabla f(C) \cdot dC &= \int_C \left( \frac{\partial f(\mathbf{c})}{\partial c_x}, \frac{\partial f(\mathbf{c})}{\partial c_y}, \frac{\partial f(\mathbf{c})}{\partial c_z} \right) \cdot d\mathbf{c} \\ &= \int_C \left( \frac{\partial f(\mathbf{c})}{\partial c_x} dc_x + \frac{\partial f(\mathbf{c})}{\partial c_y} dc_y + \frac{\partial f(\mathbf{c})}{\partial c_z} dc_z \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \int_{c=a}^b df(\mathbf{c}) = [f(c_x, c_y, c_z)]_{c=a}^b \\
 &= f(b_x, b_y, b_z) - f(a_x, a_y, a_z)
 \end{aligned}$$

となるが、三番目の等式は、多変数関数  $f(x, y, z)$  の微少量に対して一次近似を行って得られる次の全微分関係式を用いて得られたものである。

$$df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy + \frac{\partial f}{\partial z} dz$$

上の積分は点  $a, b$  にだけ関係し、積分路に依存しない。とくに、曲線  $C$  が閉曲線（始点と終点一致する曲線）のとき、線積分を  $\oint_C$  と表すことにすれば

$$\oint_C \nabla f \cdot d\mathbf{c} = 0$$

である。

例 8. 上の例 6 でのスカラー場  $f(x, y, z) = x^2yz$  と曲線  $C : \left(u, \frac{u^2}{2}, \frac{u^3}{6}\right)_{u=0}^1$  に対して、線積分を計算すると

$$\begin{aligned}
 \nabla f &= (2c_x c_y c_z, c_x^2 c_z, c_x^2 c_y) = \left(\frac{u^6}{6}, \frac{u^5}{6}, \frac{u^4}{2}\right) \\
 d\mathbf{c} &= \left(1, u, \frac{u^2}{2}\right)
 \end{aligned}$$

より

$$\int_C \nabla f \cdot d\mathbf{c} = \int_0^1 \left(\frac{u^6}{6} + \frac{u^6}{6} + \frac{u^6}{4}\right) du = \int_0^1 \frac{7u^6}{12} = \frac{1}{12}$$

が得られる。

一方、 $\int_C \nabla f \cdot d\mathbf{c}$  が経路に依存しない性質を利用すると、 $u = 0, 1$  に対応する曲線上の点の位置ベクトル  $\mathbf{c}(0) = (0, 0, 0)$  及び  $\mathbf{c}(1) = \left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{6}\right)$  より

$$\int_C \nabla f \cdot d\mathbf{c} = f\left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{6}\right) - f(0, 0, 0) = \frac{1}{12}$$

と計算が簡単になる。

### 3.1.3 仕事と線積分

質点が力  $f$  を受けて、曲線  $C$  上を  $a$  から  $b$  まで運動をするとき、変位を微小変位  $\Delta\mathbf{c}$  に分割すると、微小変位の間に力のなす仕事は  $f \cdot \Delta\mathbf{c}$  である。従って、 $a$  から  $b$  まで質点が変位する間に力のなす仕事は  $f$  の接線線積分  $\int_C f \cdot d\mathbf{c}$  で表される。また、流体の速度  $v$  のベクトル場において、 $C$  を閉曲線とするとき  $\oint_C v \cdot d\mathbf{c}$  を循環という。

### 3.2 面積分

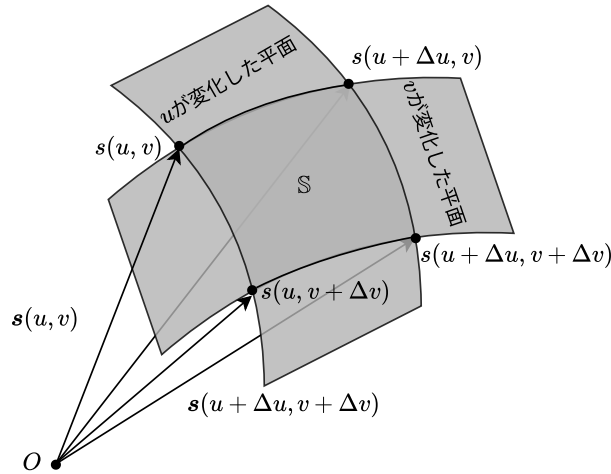


図 3.5 空間曲面

空間曲面

定義 21. 空間上の点  $s$  の位置ベクトル  $s$  が変数  $(u, v)$  の関数

$$s(u, v) = (s_x(u, v), s_y(u, v), s_z(u, v)) \tag{3.4}$$

であるとき, 変数  $(u, v)$  の変化区間  $\mathbb{D}$  での  $s$  の軌跡

$$\mathcal{S} : (s(u, v))_{(u, v) \in \mathbb{D}} = (s_x(u, v), s_y(u, v), s_z(u, v))_{(u, v) \in \mathbb{D}}$$

は空間曲面となり, 式 (3.4) を空間曲面の方程式という.

$v$  を固定したときの  $u$  についての微分係数  $\partial s / \partial u$  は  $u$  曲線に接し, 同様に  $\partial s / \partial v$  で表されるベクトルは  $v$  曲線に接する.

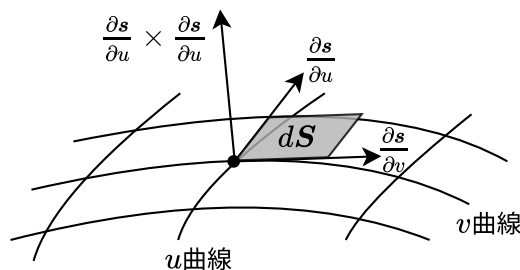


図 3.6 接平面

接平面，面素，面素ベクトル，単位法ベクトル

定義 22. 曲面  $\mathbb{S} : \mathbf{s}(u, v)$  に対して， $\partial \mathbf{s} / \partial u$ ， $\partial \mathbf{s} / \partial v$  を含む平面を接平面とし，接平面に垂直な単位ベクトル

$$\mathbf{n} = \frac{\frac{\partial \mathbf{s}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{s}}{\partial v}}{\left| \frac{\partial \mathbf{s}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{s}}{\partial v} \right|}$$

を法単位ベクトルと定義する．また，

$$\Delta \mathbf{s}_u = \mathbf{s}(u + \Delta u, v) - \mathbf{s}(u, v) \approx \frac{\partial \mathbf{s}}{\partial u} \Delta u$$

と

$$\Delta \mathbf{s}_v = \mathbf{s}(u, v + \Delta v) - \mathbf{s}(u, v) \approx \frac{\partial \mathbf{s}}{\partial v} \Delta v$$

に囲まれた四辺形の面積の極限

$$d\mathbb{S} = |\Delta \mathbf{s}_u \times \Delta \mathbf{s}_v| \approx \left| \frac{\partial \mathbf{s}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{s}}{\partial v} \right| du dv$$

を面素といい

$$d\mathbf{S} = \frac{\partial \mathbf{s}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{s}}{\partial v} du dv = \mathbf{n} d\mathbb{S}$$

を面素ベクトルという．

面積分

定義 23. 二次元変数  $(u, v)$  の変化区間  $(u, v) \in \mathbb{D}$  に対して，曲面  $\mathbb{S} : (\mathbf{s}(u, v))_{(u, v) \in \mathbb{D}}$  が与えられたとき，空間のスカラー場  $f(x, y, z)$  では

$$\iint_{\mathbb{S}} f d\mathbb{S} = \iint_{\mathbb{D}} f(s_x(u, v), s_y(u, v), s_z(u, v)) \left| \frac{\partial \mathbf{s}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{s}}{\partial v} \right| du dv$$

を  $\mathbb{S}$  における面積分といい，ベクトル場  $\mathbf{f} = (f_x(x, y, z), f_y(x, y, z), f_z(x, y, z))$  においては

$$\iint_{\mathbb{S}} \mathbf{f} \cdot d\mathbf{S} = \iint_{\mathbb{S}} \mathbf{f} \cdot \mathbf{n} d\mathbb{S}$$

をベクトル場の面積分という．

例 9. スカラー場  $f = x + y + z$  において，半径  $a$  の半球面

$$\mathbb{S} : (a \sin u \cos v, a \sin u \sin v, a \cos u)_{(u, v) \in \mathbb{D}}, \quad \mathbb{D} : (u, v)_{u=0, v=0}^{\frac{\pi}{2}, 2\pi}$$

における面積分を計算せよ．

【回答】



$$\begin{aligned}\frac{\partial \mathbf{s}}{\partial u} &= (a \cos u \cos v, a \cos u \sin v, -a \sin u) \\ \frac{\partial \mathbf{s}}{\partial v} &= (-a \sin u \sin v, a \sin u \cos v, 0)\end{aligned}$$

より

$$\begin{aligned}\left| \frac{\partial \mathbf{s}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{s}}{\partial v} \right| &= \begin{vmatrix} \mathbf{e}_x & \mathbf{e}_y & \mathbf{e}_z \\ a \cos u \cos v & a \cos u \sin v & -a \sin u \\ -a \sin u \sin v & a \sin u \cos v & 0 \end{vmatrix} \\ &= \left| (a^2 \sin^2 u \cos v, a^2 \sin^2 u \sin v, a^2 \cos u \sin u) \right| \\ &= \sqrt{a^4 \sin^4 u + a^4 \cos^2 u \sin^2 u} = a^2 \sin u\end{aligned}$$

従って,

$$\begin{aligned}& \iint_{\mathbb{S}} f d\mathbb{S} \\ &= \iint_{\mathbb{D}} (a \sin u \cos v + a \sin u \sin v + a \cos u)(a^2 \sin u) du dv \\ &= a^3 \left( \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 u du \int_0^{2\pi} \cos v dv + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 u du \int_0^{2\pi} \sin v dv + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin u \cos u du \int_0^{2\pi} dv \right) \\ &= 2a^3 \pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin u \cos u du = \pi a^3\end{aligned}$$

例 10. 平面  $\mathbb{S} : z = 1 - x - y, x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0$  におけるベクトル場  $\mathbf{f} = (2x, -y, z)$  の面積分  $\iint_{\mathbb{S}} \mathbf{f} \cdot d\mathbf{S}$  を計算せよ. ただし, 平面  $\mathbb{S}$  における方単位ベクトル  $\mathbf{n}$  の向きは, 原点から遠ざかるように選ぶ.

【回答】

$\mathbb{S} : z = 1 - x - y$  および  $z \geq 0$  より, 変数  $x$  を  $x \geq 0$  で変化させると,  $y$  は  $0 \leq y \leq 1 - x$  の範囲内で変化する. 故に, 平面上の点の座標は  $x, y$  を用いて

$$\mathbb{S} : (x, y, 1 - x - y)_{x=0, y=0}^{1, 1-x}$$

で表せる.

一方

$$\frac{\partial \mathbf{s}}{\partial x} \times \frac{\partial \mathbf{s}}{\partial y} = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_x & \mathbf{e}_y & \mathbf{e}_z \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = (1, 1, 1)$$

より

$$\iint_{\mathbb{S}} \mathbf{f} \cdot d\mathbf{S}$$

$$\begin{aligned}
&= \int_0^1 \int_0^{1-x} (2x, -y, 1-x-y) \cdot (1, 1, 1) dy dx \\
&= \int_0^1 \int_0^{1-x} (x - 2y + 1) dy dx \\
&= \int_0^1 [(x+1)y - y^2]_0^{1-x} dx \\
&= \int_0^1 2x - 2x^2 dx = \frac{1}{3}
\end{aligned}$$

電荷が面電荷密度  $\rho$  で空間上に分布されているとき，面  $S$  における全電荷は

$$Q = \iint_S \rho dS$$

で与えられる．

また， $v$  が流体（熱量）の速度ならば

$$\iint_S \mathbf{v} \cdot d\mathbf{S}$$

は単位時間に  $S$  を通過する流体（熱量）の体積である．空間上の電束（電界）密度を  $\rho$  とすると，曲面  $S$  を通過する電束（電荷）の総量は

$$\iint_S \rho \cdot d\mathbf{S}$$

で表せる．

例 11. 【ガウスの法則】原点に置かれた点電荷  $Q$  が作る静電界の電束密度は

$$\rho = \frac{Q\mathbf{r}}{4\pi r^3}$$

で与えられる．点電荷を中心とする球面  $S$  で電束の面積分を行うと

$$\iint_S \rho \cdot d\mathbf{S} = \frac{Q}{4\pi} \iint_S \frac{\mathbf{r}}{r^3} \cdot d\mathbf{S} = \frac{Q}{4\pi} 4\pi = Q$$

となる．

### 3.3 体積分

体積  $\mathcal{V}$  があるとき, この体積上の点  $v$  の位置ベクトル  $\boldsymbol{v}$  は3変数で表せるので,  $x, y, z$  の関数としてと表せる.

体積分

定義 24. 空間上で体積  $\mathcal{V}$  が与えられたとき, スカラー場  $f(x, y, z)$  において

$$\iiint_{\mathcal{V}} f(x, y, z) d\mathcal{V} = \iiint_{\mathcal{V}} f(x, y, z) dx dy dz$$

を  $\mathcal{V}$  における体積分という. ベクトル場の体積分は  $f$  の各成分を体積分したものと

$$\iiint_{\mathcal{V}} \boldsymbol{f}(x, y, z) d\mathcal{V} = \iiint_{\mathcal{V}} (f_x \boldsymbol{e}_x + f_y \boldsymbol{e}_y + f_z \boldsymbol{e}_z) d\mathcal{V}$$

である.

例 12. 領域  $\mathcal{V} : x + y + z \leq 1, x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0$  の体積を求めよ.

【回答】

$x + y + z \leq 1$  を満たす変数の変化範囲を考える.  $x$  を 0 から 1 まで変化させると, 与えられた  $x$  に対して,  $y$  の変化範囲は 0 から  $1 - x$  となる. さらに  $y$  を固定すると  $z$  の変化範囲は 0 から  $1 - x - y$  となるので体積は

$$\begin{aligned} & \iiint_{\mathcal{V}} d\mathcal{V} \\ &= \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \int_0^{1-x-y} dz \\ &= \int_0^1 dx \int_0^{1-x} (1-x-y) dy \\ &= \frac{1}{2} \int_0^1 (1-x)^2 dx = \frac{1}{6} \end{aligned}$$

である.

## 3.3.1 ヤコビアンと座標系変換

ヤコビ行列, ヤコビアン

定義 25. 独立した3つの変数  $u, v, w$  とその関数  $x(u, v, w), y(u, v, w), z(u, v, w)$  が与えられたとき

$$\begin{pmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial w} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial w} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial w} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} du \\ dv \\ dw \end{pmatrix}$$

となるが

$$J = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial w} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial w} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial w} \end{pmatrix}$$

をヤコビ行列といい, この無限小変換の体積比

$$|J| = \left| \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, w)} \right| = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial w} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial w} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial w} \end{vmatrix}$$

を  $x, y, z$  の  $u, v, w$  に関するヤコビアンと呼ぶ.

## 【性質】

$(u, v, w) \in \mathcal{U}$  のとき,  $(x, y, z) \in \mathcal{V}$  とすると

1. 領域  $\mathcal{U}$  と  $\mathcal{V}$  の点が一対一に対応
2.  $x, y, z$  が偏微分可能で導関数が連続
3.  $\mathcal{U}$  でヤコビアン  $|J|$  が零でないとき

$$\iiint_{\mathcal{V}} f(x, y, z) dx dy dz = \iiint_{\mathcal{U}} f(x(u, v, w), y(u, v, w), z(u, v, w)) |J| du dv dw$$

となる.

## 3.3.2 極座標系

点  $a$  の座標を直角座標系で  $(x, y)$ , 極座標系で  $(r, \theta)$  とすると, 両座標の関係は

$$\begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \end{cases}$$

となるので

$$|J| = \begin{vmatrix} \cos \theta & -r \sin \theta \\ \sin \theta & r \cos \theta \end{vmatrix} = r$$

となる.

例 13.

$$\begin{aligned} & \iint_{x^2+y^2 \leq 1} e^{-(x^2+y^2)} dx dy \\ &= \int_0^1 \int_0^{2\pi} e^{-r^2} r dr d\theta \\ &= \int_0^1 e^{-r^2} r dr \int_0^{2\pi} d\theta \\ &= 2\pi \left[ -\frac{e^{-r^2}}{2} \right]_0^1 \\ &= \pi(1 - e^{-1}) \end{aligned}$$

### 3.3.3 円柱座標系

点  $a$  の座標を直交座標系で  $(x, y, z)$ , 円柱座標系で  $(r, \theta, z)$  とすると, 両座標の関係は

$$\begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \\ z = z \end{cases} \quad (3.5)$$

となるので

$$|J| = \begin{vmatrix} \cos \theta & -r \sin \theta & 0 \\ \sin \theta & r \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = r$$

である.

### 3.3.4 球座標系

点  $a$  の座標を直交座標系で  $(x, y, z)$ , 球座標系で  $(r, \theta, \phi)$  とすると, 両座標の関係は

$$\begin{cases} x = r \sin \theta \cos \phi \\ y = r \sin \theta \sin \phi \\ z = r \cos \theta \end{cases} \quad (3.6)$$

となるので

$$|J| = \begin{vmatrix} \sin \theta \cos \phi & r \cos \theta \cos \phi & -r \sin \theta \sin \phi \\ \sin \theta \sin \phi & r \cos \theta \sin \phi & r \sin \theta \cos \phi \\ \cos \theta & -r \sin \theta & 0 \end{vmatrix} = r^2 \sin \theta \quad (3.7)$$

である。

例 14. 原点を中心とする半径 1 の球の内部領域を  $\mathcal{V}$  とした場合

$$\iiint_{\mathcal{V}} (x^2 + y^2 + z^2) d\mathcal{V}$$

を計算すると式 (3.6) 及び (3.7) より

$$\begin{aligned} \iiint_{\mathcal{V}} (x^2 + y^2 + z^2) d\mathcal{V} &= \iiint_{\mathcal{V}} r^2 d\mathcal{V} \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \int_0^1 r^2 \cdot r^2 \sin \theta dr d\theta d\phi = \frac{4}{5}\pi \end{aligned}$$

## 3.4 ガウスの発散定理

定理 1 (ガウスの発散定理). 閉曲面  $S$  によって囲まれた領域  $V$  がベクトル場  $f$  であるとき

$$\iiint_V \nabla \cdot f dV = \iint_S f \cdot dS$$

ただし,  $S$  の法線ベクトルは外向きにとるものとする.



閉曲面  $S$  が上側  $S_U$  と下側  $S_D$  からできているとする.  $xy$  平面上への  $S_U$  と  $S_D$  の正射影を  $M$  とし

$$S_U : z = g_U(x, y), \quad S_D : z = g_D(x, y)$$

とすると,  $(x, y) \in M$  で  $S_U$  で  $e_z \cdot n_U > 0$ ,  $S_D$  で  $e_z \cdot n_D < 0$  だから

$$\begin{aligned} \iiint_V \frac{\partial f_z}{\partial z} dV &= \iiint_V \frac{\partial f_z}{\partial z} dx dy dz = \iint_M \left( \int_{g_D}^{g_U} \frac{\partial f_z}{\partial z} dz \right) dx dy \\ &= \iint_M f_z(x, y, g_U(x, y)) dx dy - \iint_M f_z(x, y, g_D(x, y)) dx dy \\ &= \iint_{S_U} f_z e_z \cdot dS_U + \iint_{S_D} f_z e_z \cdot dS_D = \iint_S f_z e_z \cdot dS \end{aligned}$$

同様に

$$\begin{aligned} \iiint_V \frac{\partial f_x}{\partial x} dV &= \iint_S f_x e_x \cdot dS \\ \iiint_V \frac{\partial f_y}{\partial y} dV &= \iint_S f_y e_y \cdot dS \end{aligned}$$

となる. これら 3 つの和をとると

$$\begin{aligned} &\iiint_V \frac{\partial f_x}{\partial x} dV + \iiint_V \frac{\partial f_y}{\partial y} dV + \iiint_V \frac{\partial f_z}{\partial z} dV \\ &= \iint_S f_x e_x \cdot dS + \iint_S f_y e_y \cdot dS + \iint_S f_z e_z \cdot dS \\ &= \iint_S f \cdot dS \end{aligned}$$

となり, 定理が証明される.

ベクトル場  $f$  に対して,  $\nabla \cdot f$  は単位体積あたりの単位時間における湧出量であるから  $\iiint_V \nabla \cdot f dV$  は曲面  $S$  内の全湧出量である. 発散定理ではこれが単位時間に曲面  $S$  を通過して外に出る量  $\iint_S f \cdot n_S$  に等しいことを主張している.

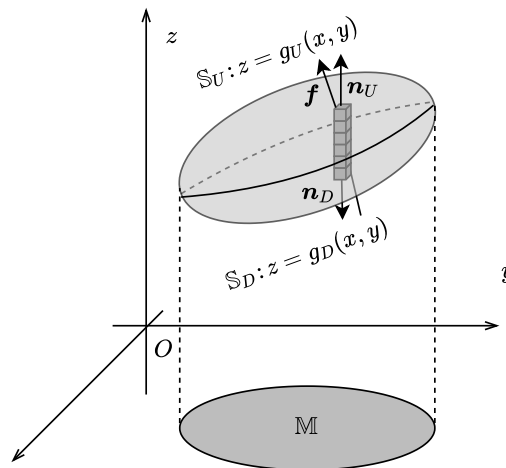


図 3.7 ガウスの発散定理

任意の閉曲面  $S$  とそれで囲まれる領域  $\mathcal{V}$  におけるスカラー場  $f$  およびベクトル場  $\mathbf{f}$  にたいして

$$\iiint_{\mathcal{V}} f d\mathcal{V} = \iint_S \mathbf{f} \cdot d\mathbf{S}$$

とする。右辺は発散定理より  $\iiint_{\mathcal{V}} \nabla \cdot \mathbf{f} d\mathcal{V}$  となるので

$$\iiint_{\mathcal{V}} (f - \nabla \cdot \mathbf{f}) d\mathcal{V} = 0$$

を得るが、 $\mathcal{V}$  は任意だから  $f = \nabla \cdot \mathbf{f}$  である。

例 15. 半球面  $S : x^2 + y^2 + z^2 = 1, z \geq 0$  上において、ベクトル場  $\mathbf{f} = (xz, yz, 0)$  の面積分  $\iint_S \mathbf{f} \cdot d\mathbf{S}$  を計算せよ。

【回答】

半球面  $S$  およびその底面  $S' : x^2 + y^2 \leq 1, z = 0$  の和集合は半球領域  $\mathcal{V} : x^2 + y^2 + z^2 \leq 1, z \geq 0$  の閉曲面であるので、ガウスの発散定理より

$$\iiint_{\mathcal{V}} \nabla \cdot \mathbf{f} d\mathcal{V} = \iint_S \mathbf{f} \cdot d\mathbf{S} + \iint_{S'} \mathbf{f} \cdot d\mathbf{S}$$

であるが、 $S'$  で  $\mathbf{f} = \mathbf{0}$  であるため

$$\iiint_{\mathcal{V}} \nabla \cdot \mathbf{f} d\mathcal{V} = \iint_S \mathbf{f} \cdot d\mathbf{S}$$

である。 $\nabla \cdot \mathbf{f} = 2z$  より

$$\iint_S \mathbf{f} \cdot d\mathbf{S} = \iiint_{\mathcal{V}} 2z d\mathcal{V} = 2 \int_0^1 z dz \iint_{x^2+y^2 \leq 1-z^2} dx dy$$



$$\begin{aligned}
 &= 2 \int_0^1 z\pi(1-z^2)dz = 2\pi \int_0^1 (z-z^3)dz \\
 &= \frac{\pi}{2}
 \end{aligned}$$

### 3.5 ストークスの定理

定理 2. ベクトル場  $f$  内に曲面  $S$  があり, その境界が閉曲線  $C$  であるとする. 曲面の単位法線ベクトル  $n$  を  $S$  の正の側にとり,  $C$  を正の方向にまわるとき

$$\iint_S \nabla \times \mathbf{f} \cdot d\mathbf{S} = \oint_C \mathbf{f} \cdot d\mathbf{c}$$

ただし, 法線ベクトル  $n$  は外向きにとるものとする.



$S$  を  $xy$  平面で両辺の長さが  $a$  と  $b$  となり, 法線方向が  $z$  軸と同じの長方形とすると, 面積分は

$$\iint_S \nabla \times \mathbf{f} \cdot d\mathbf{S} = \iint_S \left( \frac{\partial f_y}{\partial x} - \frac{\partial f_x}{\partial y} \right) dx dy = \int_0^b \int_0^a \left( \frac{\partial f_y}{\partial x} - \frac{\partial f_x}{\partial y} \right) dx dy$$

となる. 積分において

$$\int_a^b f'(x) dx = [f(x)]_a^b$$

となるので, 上の式は

$$\begin{aligned}
 &\int_0^b [f_y]_0^a dy - \int_0^a [f_x]_0^b dx \\
 &= \int_0^b f_y(a, y, 0) dy - \int_0^b f_y(0, y, 0) dy - \int_0^a f_x(x, b, 0) dx + \int_0^a f_x(x, 0, 0) dx \\
 &= \int_{C_1} \mathbf{f} \cdot d\mathbf{c} + \int_{C_2} \mathbf{f} \cdot d\mathbf{c} + \int_{C_3} \mathbf{f} \cdot d\mathbf{c} + \int_{C_4} \mathbf{f} \cdot d\mathbf{c} \\
 &= \oint_C \mathbf{f} \cdot d\mathbf{c}
 \end{aligned}$$

となる.

ストークス定理は閉曲線を縁とする曲面内の回転の総量はその閉曲線に沿うベクトル  $f$  の線積分に等しいことを意味する.

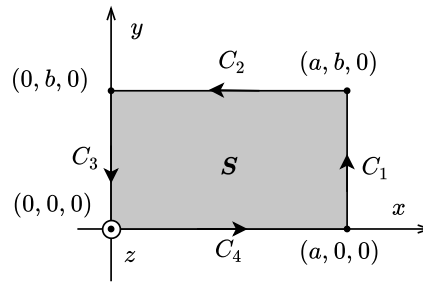


図 3.8 ストークスの定理

例 16. 球面  $x^2 + y^2 + (z - 3)^2 = 3^2$  と平面  $z = x + 3$  の交わりを  $C$  とし, 原点からみて時計回りを正の向きとする. このとき, ベクトル場  $f = (2y, z, 3y)$  について線積分  $\oint_C f \cdot dc$  を計算せよ.

【回答】

球  $x^2 + y^2 + (z - 3)^2 \leq 3^2$  を平面  $z = x + 3$  で切った断面を  $S$  とする. この平面の  $xy$  平面に対する正射影は平面の方程式を球面に代入して

$$\mathbb{D} : 2x^2 + y^2 \leq 3^2$$

となるがその面積は

$$\iint_{\mathbb{D}} dx dy = 4 \int_0^3 \int_0^{\sqrt{\frac{3^2 - y^2}{2}}} dx dy = 4 \int_0^3 \sqrt{\frac{3^2 - y^2}{2}} dy$$

$y = 3 \sin \theta$  とおくと

$$4 \int_0^3 \sqrt{\frac{3^2 - y^2}{2}} dy = 4 \int_0^{\pi/2} \frac{9 \cos^2 \theta}{\sqrt{2}} d\theta = \frac{18}{\sqrt{2}} \int_0^{\pi/2} (1 + \cos 2\theta) d\theta = \frac{9\pi}{\sqrt{2}}$$

である. また,  $S = (x, y, x + 3)$  より

$$dS = \begin{vmatrix} e_x & e_y & e_z \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} dx dy = (-1, 0, 1) dx dy$$

一方

$$\nabla \times f = \begin{vmatrix} e_x & e_y & e_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 2y & z & 3y \end{vmatrix} = (2, 0, -2)$$

なので,  $\nabla \times f \cdot dS = -4 dx dy$  であるので, ストークス定理より

$$\oint_C f \cdot c = \iint_{\mathbb{D}} -4 dx dy = -18\sqrt{2}\pi$$

## 演習問題

1. スカラー場  $f(x, y, z) = x + y + z$  において, 円柱ラ線

$$C : (\alpha \cos u, \alpha \sin u, \beta u)_{u=0}^{\pi}$$

に沿った  $f(x, y, z)$  の線積分を求めよ.

2. アステロイド曲線の一部  $C : (r \cos^3 u, r \sin^3 u)_{u=0}^{\pi/2}$ ,  $r > 0$  の弧長を求めよ.
3. スカラー場  $f(x, y, z) = x^2 - yz$  に対して, 原点  $o$ , 点  $p = (1, 2, 2)$ , 点  $q = (3, 3, 2)$  を順次に結ぶ線分  $C$  に沿う線積分を求めよ.
4. 3次元スカラー場  $f(x, y, z) = xyz$  に, 点  $o = (0, 0, 0)$ ,  $a = (1, 1, 1)$ ,  $b = (1, 2, 3)$  があるとする.  
 (a) 点  $o$  と  $a$  を結ぶ線分  $C_1 : (u, u, u)_{u=0}^1$  に沿った線積分を求めよ.  
 (b) 点  $o$  と  $a$  を結ぶ線分  $C_2 : (u^2, u^2, u^2)_{u=0}^1$  に沿った線積分を求めよ.  
 (c) 点  $o$  と  $b$  を結ぶ線分  $C_3 : (u, 2u, 3u)_{u=0}^1$  に沿った線積分を求めよ.
5. スカラー場  $f(x, y, z) = 2x - yz$  の次の曲線  $C$  に沿う線積分を求めよ.  
 (a) 曲線  $C : (3u, 3u, 2u)_{u=0}^1$   
 (b) 曲線  $C$  : 原点  $o$ , 点  $p = (3, 3, 0)$ , 点  $q = (3, 3, 2)$  を順次に結ぶ線分
6. 定数  $r$  に対して, スカラー場  $f(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$  と曲線  $C : (r \cos u, r \sin u, r)_{u=0}^{\frac{3\pi}{2}}$  が与えられたとき, 次の問に答えよ.  
 (a) 線要素を求めよ.  
 (b) 線積分

$$\int_C f dC$$

を求めよ.

7. ベクトル場  $f = (x^2 + 2y, 7yz, -8x^2z)$  の曲線  $C : (u, u^2, u^3)_{u=0}^1$  に沿う線積分を求めよ.
8. 次の接線線積分を求めよ.  
 (a) ベクトル場  $f = (x^2, y^2, z^2)$ , 曲線  $C : (\cos u, \sin u, u)_{u=0}^{\pi/2}$   
 (b) ベクトル場  $f = (y^2z^3, 2xyz^3, 3xy^2z^2)$ , 曲線  $C : (u^2, u^4, u^6)_{u=0}^1$
9. ベクトル場  $f = \nabla(x^2yz)$  に対して, 線積分

$$\int_C \mathbf{f} \cdot d\mathbf{c}$$

を求めよ. ここで,  $C = C_1 + C_2$  は次に定める曲線とせよ.

$$C_1 : (a + u, b + u, c)_{u=0}^1$$

$$C_2 : (a + 1, b + 1, c + u)_{u=0}^1$$

10. ベクトル場  $f(x, y, z) = (yz, zx, xy)$  において, 原点  $o(0, 0, 0)$  から点  $a(1, 2, 2)$  までの直線に沿った接線線積分

$$\int_C \mathbf{f} \cdot d\mathbf{c}$$

の値を

- (a) 定義に基づいて計算せよ。  
 (b) 積分経路非依存性を利用して計算せよ。

## 11. 曲面

$$\mathbb{S} : (u \cos v, u \sin v, u)_{u=0, v=0}^{1, 2\pi}$$

が与えられたとき、次の問に答えよ。

- (a)  $\mathbb{S}$  の概形を描け  
 (b)  $\mathbb{S}$  の面積を求めよ。  
 (c)  $S$  上で  $f(u, v) = (u, v, 0)$  とするとき、法単位ベクトルの  $z$  成分は正であるとし、面積分  $\iint_S \mathbf{f} \cdot d\mathbf{S}$  を求めよ。
12. 平面  $\mathbb{S} : 2x + y + z = 2, x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0$  におけるスカラー場  $f = x^2 + y - z$  の面積分を計算せよ。
13. ベクトル場  $\mathbf{f} = (x^2, y^2, z^2)$  の平面  $S : 2x + 2y + z = 2, x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0$  に沿っての面積分を計算せよ。ただし、平面  $S$  の法単位ベクトルの向きは原点から遠ざかるように選ぶ。
14. ベクトル場  $\mathbf{f} = (z, x, -3y^2z)$  において、円柱面  $x^2 + y^2 = 16$  のうち  $x \geq 0, y \geq 0, 0 \leq z \leq 5$  に含まれる曲面  $S$  に対して、面積分  $\iint_S \mathbf{f} \cdot d\mathbf{S}$  を求めよ。
15. 原点から半径  $r$  の球面の内部を  $\mathcal{V}$  とし、ベクトル場  $\mathbf{f}(x, y, z) = (x^2, y^2, z^2)$  に対して、 $\iiint_{\mathcal{V}} \mathbf{f} d\mathcal{V}$  を求めよ。
16. 原点を中心とする半径 1 の級の内部領域を  $\mathcal{V}$  とし、体積分

$$\iiint_{\mathcal{V}} (1+x) d\mathcal{V}$$

を計算せよ。

17.  $\mathbf{r} = (x, y, z), r = |\mathbf{r}|$  とした時、ガウスの発散定理より、半径  $a$  の球面  $\mathbb{S}$  の内部領域  $\mathcal{V}$  にたいして

$$\iiint_{\mathcal{V}} \frac{1}{r^2} d\mathcal{V} = 4\pi a$$

が成り立つことを示せ。

18. ベクトル場が  $\mathbf{f}(x, y, z) = (x^3 + yz^2, y^3 + zx^2, z^3 + xy^2)$  で与えられたとき、原点を中心とする単位球面  $S$  に対して、 $\iint_S \mathbf{f} \cdot d\mathbf{S}$  を求めよ。
19.  $\mathbb{S}$  を原点を中心とする半径 1 の球面とし、ベクトル場  $\mathbf{f} = (\alpha x, \beta y, \gamma z)$  の  $\mathbb{S}$  上の面積分

$$\iint_S \mathbf{f} \cdot d\mathbf{S}$$

を求めよ。ただし、 $\alpha, \beta, \gamma$  は定数とし、平面  $\mathbb{S}$  の方向単位ベクトル  $\mathbf{n}$  の向きは原点から遠ざかるように選ぶ。

## 20. ベクトル場が

$$\mathbf{f}(x, y, z) = \left( \frac{x}{r}, \frac{y}{r}, \frac{z}{r} \right), \quad r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

で与えられたとき、原点を中心とする単位球面  $S$  に対して、 $\iint_S \mathbf{f} \cdot d\mathbf{S}$  を求めよ。

21. 底辺の円が  $xy$  平面にあって中心が原点と一致する半径  $r$ , 高さ  $h$  の円筒内の領域を  $\mathcal{V}$  とし, ベクトル場

$$\mathbf{f}(x, y, z) = \left( \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}, 0 \right)$$

について体積分  $\iiint_{\mathcal{V}} \nabla \cdot \mathbf{f} dV$  を求めよ.

22. 次の面積分  $\iint_{\mathcal{S}} \mathbf{f} \cdot d\mathbf{S}$  を計算せよ.

(a)  $\mathbf{f} = (x, y, z)$  と  $\mathcal{S} : x^2 + y^2 + z^2 = 1, z \geq 0$ .

(b)  $\mathbf{f} = (x^2, y^2, z^2)$  と  $\mathcal{S} : z^2 = x^2 + y^2, 1 \leq z \leq 2$ .

(c)  $\mathbf{f} = (x, y, -y)$  と  $\mathcal{S} : x^2 + y^2 = 1, 0 \leq z \leq 1$ .

23.  $x^2 + y^2 = 1, z = 0$  で表される曲線を  $C$  とする. 3次元のベクトル場  $\mathbf{f}(x, y, z) = (2x + 3y, 3x - 5y, 0)$  について, ストークス定理を利用し,  $\oint_C \mathbf{f} \cdot d\mathbf{c}$  を求めよ.

24. ベクトル場  $\mathbf{f} = (x^2 + y, x^2 + 2z, 2y)$  に対して, ストークス定理を利用して  $xy$  平面上の円  $C : x^2 + y^2 = 4$  に沿っての線積分を求めよ.

25. 平面  $\mathcal{S} : x + y + z = 1, x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0$  で,  $x + y + z > 1$  の側を表にした場合, ベクトル場  $\mathbf{f} = (3z, z, 2y)$  に対して, ストークス定理が成り立つことを確認せよ.

## 第 4 章

# 常微分方程式

### 常微分方程式

定義 26. 変数  $x$  の関数  $f(x)$  とその導関数

$$f'(x), f''(x), f^{(3)}, \dots, f^{(n)}$$

を含む関係式

$$g(x, f(x), f'(x), f''(x), \dots, f^{(n)}) = 0$$

を  $f(x)$  に関する常微分方程式という。また、常微分方程式での導関数の最高階が  $n$  であるとき、 $n$  階の常微分方程式という。

例 17. 放射性物質は質量に比例した量が崩壊していく。時刻  $t = 0$  での質量が  $q_0$  で、各時刻での質量の  $\alpha, \alpha < 1$ , 倍が崩壊する場合、時刻  $t$  での質量  $q(t)$  を求めるには

$$\begin{cases} q'(t) &= -\alpha q(t) \\ q(0) &= q_0 \end{cases}$$

を解けばよい。

例 18. 真空中で物体が静止状態から落下するとき、時刻  $t$  と落下距離  $s(t)$  の関係は重力加速度を  $g$  とすると、2 階の常微分方程式

$$s''(t) = g$$

で与えられる。

時刻 0 では静止状態だったので，初期条件は

$$s(0) = 0, \quad s'(0) = 0$$

である．

例 19. 天井に鉛直につるしたバネの下端に質量  $m$  のおもりをつけ，下に引っ張って離れたあとのおもりの運動方程式を求めよ．ただし，バネの弾力定数は  $k$  で質量は無視できるものとする．

【回答】

おもりが静止した状態でバネが  $\ell$  ぐらい伸びたとすると

$$mg = k\ell$$

となる．下方向を正の方向をするとニュートンの第 2 法則により

$$mf''(t) = mg - k(\ell + f(t))$$

が成り立ち，前の式を代入すると

$$mf''(t) + kf(t) = 0$$

が得られる．

例 20. インダクタンス  $L$  のコイルと抵抗  $R$  が直列した回路での起電力  $E_0$  をした場合，スイッチを閉じた後の回路の電流の方程式を導けよ．

【回答】

時刻  $t$  での電流を  $I(t)$  とおくと，インダクタンスと抵抗での電圧はそれぞれ  $LI'(t)$  と  $RI(t)$  である．従って電流は

$$E_0 = RI(t) + LI'(t)$$

を満たさなければならない．スイッチを閉じる瞬間を  $t = 0$  とすると初期条件は

$$I(0) = 0$$

となる．

## 4.1 一階常微分方程式

変数  $x$  のみの関数を  $g(x)$ ,  $f(x)$  の関数を  $h(f(x))$  とし,  $\alpha, \beta$  で定数を表す.

### 4.1.1 変数分離形

変数分離形

定義 27. 変数  $x$ , 関数  $f(x)$  およびその導関数  $f'(x)$  の関係式が

$$f'(x) = g(x)h(f(x)) \quad (4.1)$$

の形で表せる微分方程式を変数分離形という.

【解法】

式 (4.1) を

$$\frac{1}{h(f(x))} df(x) = g(x) dx$$

の形に変形し,  $y = f(x)$  として両辺を積分すると

$$\int \frac{1}{h(y)} dy = \int g(x) dx + \alpha$$

が一般解となる.  $y = f(x)$  なので,  $f(x)$  に関する関係式が得られ, 初期条件から  $\alpha$  を求め, 特殊解を得る.



例 21. 例 17 の方程式を

$$\frac{1}{q(t)}dq(t) = -\alpha dt$$

と書き，両辺を積分すると

$$\ln |q(t)| = -\alpha t + \alpha_0$$

となるが，題意により  $q(t) \geq 0$  となるので，一般解は

$$q(t) = e^{-\alpha t + \alpha_0}$$

である．初期条件により， $e^{\alpha_0} = q_0$  となるので，解は  $q(t) = q_0 e^{-\alpha t}$  である．

#### 4.1.2 同次形

同次形

定義 28. 関係式が

$$f'(x) = h\left(\frac{f(x)}{x}\right)$$

で表される微分方程式を同次形という．

【解法】

$u(x) = \frac{f(x)}{x}$  とおくと， $f(x) = u(x)x$  より， $df(x) = xdu(x) + u(x)dx$  となるので，関係式は

$$\frac{du(x)}{h(u(x)) - u(x)} = \frac{dx}{x}$$

と変数分離形で書ける．変数分離形の解法により

$$\int \frac{du(x)}{h(u(x)) - u(x)} = \ln |x| + \alpha$$

が得られ，一般解は

$$x = \pm \alpha e^{\int \frac{du(x)}{h(u(x)) - u(x)}}$$

で与えられる．

例 22. 方程式

$$f'(x) = \frac{f^2(x)}{x^2 + xf(x)}$$

は

$$f'(x) = \frac{\left(\frac{f(x)}{x}\right)^2}{1 + \left(\frac{f(x)}{x}\right)}$$

と書けるので、同次形である． $f(x) = xu(x)$  とおけば

$$x \frac{du(x)}{dx} = \frac{-u(x)}{1 + u(x)}$$

したがって

$$\left(1 + \frac{1}{u(x)}\right) du(x) + \frac{dx}{x} = 0$$

より

$$u(x) + \ln |u(x)| + \ln |x| = \alpha$$

であるため、一般解は

$$\begin{aligned} \frac{f(x)}{x} + \ln \frac{|f(x)|}{|x|} + \ln |x| &= \alpha \\ \Leftrightarrow f(x) + x \ln |f(x)| &= \alpha x \end{aligned}$$

を満たす．

### 4.1.3 線形微分方程式

線形微分方程式

定義 29.  $f'(x)$  が  $f(x)$  の一次で関係式

$$f'(x) = g_0(x)f(x) + g(x)$$

が与えられる微分方程式を 1 階線形微分方程式という． $g(x) = 0$  のとき、同次方程式といい、 $g(x) \neq 0$  のときは非同次方程式と呼ぶ．

同次方程式は

$$\frac{df(x)}{f(x)} = g_0(x)dx$$

の形式に変形すると、変数分離形の方程式となるので、以下非同次方程式の二つの解法について説明する．

【積分因子による解法】

関係式の両辺に  $a(x)$  を乗算すると

$$f'(x)a(x) = a(x)g_0(x)f(x) + a(x)g(x)$$

となるので、変形して

$$a(x)g(x) = f'(x)a(x) - g_0(x)a(x)f(x)$$

が得られる。

一方，二つの関数の積の微分は

$$[f(x)a(x)]' = f'(x)a(x) + a'(x)f(x)$$

であることより，与えた  $a(x)$  が

$$a'(x) + g_0(x)a(x) = 0 \quad (4.2)$$

を満たせば， $f(x)$  は

$$[f(x)a(x)]' = a(x)g(x) \quad (4.3)$$

を解くことで求められる。

式 (4.2) を満たす  $a(x)$  の一般解は

$$\int \frac{da(x)}{a(x)} + g_0(x)dx = 0$$

より

$$a(x) = \alpha e^{-\int g_0(x)dx}$$

で与えられるので，式 (4.3) を満たす一般解は

$$f(x) = e^{\int g_0(x)dx} \left[ \int e^{-\int g_0(x)dx} g(x)dx + \beta \right]$$

で表される。

微分因子

定義 30.  $a(x)$  のような微分方程式にかけると，関係式がある関数の微分の形になるような関数を微分因子という。

例 23.

$$f'(x) = xf(x) + x^2$$

の一般解について考える。

両辺に  $a(x)$  を乗算すると

$$a(x)f'(x) - xa(x)f(x) = x^2a(x)$$

であるので

$$a'(x) = -xa(x)$$

を満たす関数

$$a(x) = \alpha e^{-\frac{x^2}{2}}$$

に対して

$$[f(x)a(x)]' = x^2a(x)$$

が成り立つ．故に  $f(x)$  の一般解は

$$\begin{aligned} f(x) &= e^{\frac{x^2}{2}} \left( \int e^{-\frac{x^2}{2}} x^2 dx + \beta \right) \\ &= e^{\frac{x^2}{2}} \left( - \int x de^{-\frac{x^2}{2}} + \beta \right) \\ &= e^{\frac{x^2}{2}} \int e^{-\frac{x^2}{2}} dx - x + \beta e^{\frac{x^2}{2}} \end{aligned}$$

である．

### 【定数変化法による解法】

変数分離形の解法を用いると，同次方程式

$$\frac{df(x)}{f(x)} = g_0(x)dx$$

の一般解は

$$f(x) = \alpha e^{\int g_0(x)dx}$$

で与えられる．次に， $\alpha$  を定数から  $x$  の関数とみなすと

$$\begin{aligned} f'(x) &= \alpha'(x)e^{\int g_0(x)dx} + g_0(x)\alpha(x)e^{\int g_0(x)dx} \\ &= g_0(x)f(x) + \alpha'(x)e^{\int g_0(x)dx} \end{aligned}$$

となるので， $\alpha(x)$  を

$$\alpha'(x)e^{\int g_0(x)dx} = g(x)$$

を満たすように

$$\alpha(x) = \int e^{-\int g_0(x)dx} g(x)dx + \beta$$

と設定すると，一般解は

$$f(x) = e^{\int g_0(x)dx} \left[ \int e^{-\int g_0(x)dx} g(x)dx + \beta \right]$$

で表される．

定数変化法

定義 31. 同次方程式の解での定数を関数とみなして，非同次方程式の解を求める方法を定数変化法という．

例 24. 上の例での一般解を定数変化法で求めると、まず

$$f'(x) = xf(x)$$

より、同次方程式の一般解

$$f(x) = \alpha e^{\frac{x^2}{2}}$$

を得る。次に

$$f(x) = \alpha(x)e^{\frac{x^2}{2}}$$

とおくと

$$\begin{aligned} f'(x) &= \alpha(x)xe^{\frac{x^2}{2}} + \alpha'(x)e^{\frac{x^2}{2}} \\ &= xf(x) + \alpha'(x)e^{\frac{x^2}{2}} \end{aligned}$$

であるので

$$\begin{aligned} \alpha(x) &= \int x^2 e^{-\frac{x^2}{2}} dx + \beta \\ &= \int e^{-\frac{x^2}{2}} dx - xe^{-\frac{x^2}{2}} + \beta \end{aligned}$$

となる。

従って、一般解は

$$f(x) = e^{\frac{x^2}{2}} \int e^{-\frac{x^2}{2}} dx - x + \beta e^{\frac{x^2}{2}}$$

で表される。

## 4.2 二階常微分方程式

## 二階線形微分方程式

定義 32.  $x$  のみの関数  $g_0(x), g_1(x)$  及び  $g(x)$  が与えられたとき

$$f''(x) + g_1(x)f'(x) + g_0(x)f(x) = g(x) \quad (4.4)$$

の形式の微分方程式を 2 階線形微分方程式と呼ぶ。  $g(x) = 0$  のとき、同次方程式といい、  $g(x) \neq 0$  のときには、非同次方程式という。

定理 3.  $g(x), g_0(x), g_1(x)$  が区間  $\mathbb{X}$  で連続であるとき、区間内の点  $x = a$  における初期条件

$$f(x)|_{x=a} = b_0, f'(x)|_{x=a} = b_1$$

のもとで、2 階線形微分方程式 (4.4) の解は区間  $\mathbb{X}$  でただ 1 つ存在する。

証明略

## 4.2.1 二階線形微分方程式の解

## ロンスキャン

定義 33. 2 つの関数  $f_1(x), f_2(x)$  に対して

$$W[f_1(x), f_2(x)] = \det \begin{pmatrix} f_1(x) & f_2(x) \\ f_1'(x) & f_2'(x) \end{pmatrix}$$

をロンスキャンという。

## 【性質】

$f_1(x), f_2(x)$  が一次従属<sup>\*1</sup>  $\Rightarrow W[f_1(x), f_2(x)] = 0$ 。ただし、逆は成り立たない。

## 【証明】

同時に 0 とならない  $\alpha_1, \alpha_2$  に対して

$$\alpha_1 f_1(x) + \alpha_2 f_2(x) = 0 \quad (4.5)$$

$$\alpha_1 f_1'(x) + \alpha_2 f_2'(x) = 0 \quad (4.6)$$

が成り立つ。  $\alpha_1 \neq 0$  とすると、(4.5) に  $f_2'(x)$ , (4.6) に  $f_2(x)$  を掛けた項の差をとると

$$\alpha_1 \det \begin{pmatrix} f_1(x) & f_2(x) \\ f_1'(x) & f_2'(x) \end{pmatrix} = \alpha_1 W[f_1(x), f_2(x)] = 0$$

なので、ロンスキャンが 0 となる。同様に  $\alpha_2 \neq 0$  のときもロンスキャンが 0 になることが示せる。

<sup>\*1</sup>  $\alpha_1 f_1(x) + \alpha_2 f_2(x) = 0$  が恒等的に成り立つ  $\Rightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = 0$  であれば、 $f_1(x)$  と  $f_2(x)$  は一次独立であるといい、一次独立でない場合は一次従属という。

逆の場合は

$$f_1(x) = \begin{cases} x^2 & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}, \quad f_2(x) = \begin{cases} 0 & x \geq 0 \\ x^2 & x < 0 \end{cases}$$

とおくと,  $W[f_1(x), f_2(x)] = 0$  であるが,  $f_1(x)$  と  $f_2(x)$  は独立である.

**定理 4.** 二階線形同次微分方程式の解空間  $\mathbb{F}$  において, 任意の 2 つの関数  $f_1(x), f_2(x) \in \mathbb{F}$  の線型結合

$$f(x) = \alpha_1 f_1(x) + \alpha_2 f_2(x), \quad \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$$

も  $\mathbb{F}$  の関数である. また,  $\mathbb{F}$  には線形独立な 2 つの関数  $f_1(x), f_2(x)$  が存在し,  $\mathbb{F}$  の任意の関数は  $f_1(x)$  と  $f_2(x)$  の線型結合

$$f(x) = \alpha_1 f_1(x) + \alpha_2 f_2(x)$$

でただ 1 通りに表される.

**【証明】**

● 一次結合が解

同次微分方程式を  $h(f(x)) = 0$  と表した場合, 線形微分方程式に対して

$$h(f(x)) = h(\alpha_1 f_1(x) + \alpha_2 f_2(x)) = \alpha_1 h(f_1(x)) + \alpha_2 h(f_2(x))$$

が成り立つ.  $f_1(x), f_2(x)$  が線形同次微分方程式の解なので, 上の式は 0 であり,  $f(x)$  も解となる.

● 独立解の存在

定理 3 より, 与えられた初期条件のもとで解はただ 1 つ存在するので, 区間  $\mathbb{X}$  内の点  $a$  に対して

$$f_1(x): f(x)|_{x=a} = 1, f'(x)|_{x=a} = 0 \text{ の解}$$

$$f_2(x): f(x)|_{x=a} = 0, f'(x)|_{x=a} = 1 \text{ の解}$$

とおくと,  $W[f_1(x), f_2(x)]|_{x=a} = 1 \neq 0$  より  $f_1(x)$  と  $f_2(x)$  は一次独立である.

●  $\mathbb{F}$  の任意の関数  $f(x)$  の  $x = a$  での初期値を

$$f(x)|_{x=a} = \alpha_1, \quad f'(x)|_{x=a} = \alpha_2$$

とし

$$g(x) = \alpha_1 f_1(x) + \alpha_2 f_2(x)$$

及び  $g(x)$  の微分の  $x = a$  での値を調べると

$$\begin{aligned} g(x)|_{x=a} &= \alpha_1 f_1(x)|_{x=a} + \alpha_2 f_2(x)|_{x=a} = \alpha_1 \\ g'(x)|_{x=a} &= \alpha_1 f_1'(x)|_{x=a} + \alpha_2 f_2'(x)|_{x=a} = \alpha_2 \end{aligned}$$

なので  $g(x) = f(x)$  である. 従って,  $\mathbb{F}$  の任意の関数はある定数  $\alpha_1, \alpha_2$  を用いて

$$f(x) = \alpha_1 f_1(x) + \alpha_2 f_2(x)$$

と書ける.

- 一意性

$$\begin{cases} f(x) = \alpha_1 f_1(x) + \alpha_2 f_2(x) \\ f(x) = \beta_1 f_1(x) + \beta_2 f_2(x) \end{cases}$$

で表されるなら

$$(\alpha_1 - \beta_1)f_1(x) + (\alpha_2 - \beta_2)f_2(x) = 0$$

より  $\alpha_1 = \beta_1$  かつ  $\alpha_2 = \beta_2$  でないと,  $f_1(x)$  と  $f_2(x)$  は一次従属になる.

定理 5. 非同次方程式の 1 つの特殊解を  $v(x)$  とするとき, 二階非同次線形微分方程式の任意の解は同次方程式の基本解  $f_1(x), f_2(x)$  を用いて

$$f(x) = \alpha f_1(x) + \alpha_2 f_2(x) + v(x)$$

で表せる.

【証明】

$g(x) = f(x) - v(x)$  とおくと,  $g(x)$  は同次方程式の解となる. 従って, 非同次方程式の解は上の式で表せる.

#### 4.2.2 二階定係数線形同次微分方程式

二階の線形同次微分方程式のうち, 係数が定数となる

$$f''(x) + c_1 f'(x) + c_0 f(x) = 0 \quad (4.7)$$

の形の微分方程式について考える.

$f(x) = e^{\lambda x}$  とした場合,  $f'(x) = \lambda e^{\lambda x}$ ,  $f''(x) = \lambda^2 e^{\lambda x}$  となるので, (4.7) は

$$(\lambda^2 + c_1 \lambda + c_0) e^{\lambda x} = 0$$

となる.  $e^{\lambda x} \neq 0$  より次の方程式が, (4.7) の解を求める鍵となる.

特性方程式

定義 34. (4.7) で与えられた二階同次微分方程式にたいして

$$\lambda^2 + c_1 \lambda + c_0 = 0$$

を微分方程式の特性方程式とよぶ.

$$\rho = \frac{c_1}{2}, \quad \omega = \frac{\sqrt{|c_1^2 - 4c_0|}}{2}$$

特性方程式の解の形式によって, 次の三種類が考えられる.



1.  $c_1^2 - 4c_0 > 0$  の場合

特性方程式は2つの異なる実数解

$$\lambda_{1,2} = -\rho \pm \omega$$

を持つので、微分方程式の基本解は

$$f_1(x) = e^{-(\rho-\omega)x}, f_2(x) = e^{-(\rho+\omega)x}$$

一般解は

$$f(x) = \alpha_1 f_1(x) + \alpha_2 f_2(x) = \alpha_1 e^{-(\rho-\omega)x} + \alpha_2 e^{-(\rho+\omega)x}$$

で表される.

2.  $c_1^2 - 4c_0 = 0$  の場合

特性方程式は重解  $\lambda_1 = \lambda_2 = -\rho$  を持つので

$$f_1(x) = e^{-\rho x}$$

は微分方程式の1つの解である.

一次独立な他の解は、定数変化法を用いて計算する.  $\alpha e^{-\rho x}$  が解なので

$$f_2(x) = \alpha(x) e^{-\rho x}$$

とし、微分

$$\begin{aligned} f_2'(x) &= [\alpha'(x) - \rho\alpha(x)] e^{-\rho x} \\ f_2''(x) &= [\alpha''(x) - 2\rho\alpha'(x) + \rho^2\alpha(x)] e^{-\rho x} \end{aligned}$$

を(4.7)に代入すると

$$[\alpha''(x) + (c_1 - 2\rho)\alpha'(x) + (\rho^2 - c_1\rho + c_0)\alpha(x)] e^{-\rho x} = 0$$

ここで  $-\rho = -\frac{c_1}{2}$  は特性方程式の重解なので  $2\rho = c_1$  および  $\rho^2 - c_1\rho + c_0 = 0$  が成り立ち、上の式は

$$\alpha''(x) e^{-\rho x} = 0$$

となる. 故に  $\alpha(x) = \beta_1 x + \beta_0$  となり、 $\alpha(x) = x$  とし

$$f_2(x) = x e^{-\rho x}$$

とおくと

$$W[f_1(x), f_2(x)] = e^{-2\rho x}$$

より  $f_1(x)$  とは一次独立な解となる. 従って、一般解は

$$f(x) = \alpha_1 f_1(x) + \alpha_2 f_2(x) = \alpha_1 e^{-\rho x} + \alpha_2 x e^{-\rho x}$$

で表される.

3.  $c_1^2 - 4c_0 < 0$  の場合

特性方程式は2つの異なる複素数解

$$\lambda_{1,2} = -\rho \pm j\omega$$

を持つので、微分方程式の基本解は

$$g_{1,2}(x) = e^{-\rho \pm j\omega x} = e^{-\rho x} (\cos \omega x \pm j \sin \omega x)$$

で表されるが、その一次結合

$$f_1(x) = \frac{g_1(x) + g_2(x)}{2} = e^{-\rho x} \cos \omega x$$

$$f_2(x) = \frac{g_1(x) - g_2(x)}{2j} = e^{-\rho x} \sin \omega x$$

を用いて一般解を

$$f(x) = \alpha_1 f_1(x) + \alpha_2 f_2(x) = e^{-\rho x} (\alpha_1 \cos \omega x + \alpha_2 \sin \omega x)$$

で表すと簡潔である。

例 25. 抵抗  $R$ 、コイル  $L$  およびコンデンサー  $C$  が直列連結された回路にかかる電圧を  $E(t)$  とすると、回路に流れる電流  $I(t)$  は

$$LI'(t) + RI(t) + \frac{1}{C} \int_{t_0}^t I(\tau) d\tau = E(t)$$

が成り立つので、両辺を微分して

$$LI''(t) + RI'(t) + \frac{1}{C}I(t) = E'(t)$$

が得られる。

時刻  $t = 0$  において、電源を外し  $RLC$  閉回路での電流  $I(t)$  の変化を

$$I''(t) + \frac{R}{L}I'(t) + \frac{1}{LC}I(t) = 0$$

に基づいて考えると、特性方程式は

$$\lambda^2 + \frac{R}{L}\lambda + \frac{1}{LC} = 0$$

となるので

$$\rho = \frac{R}{2L}, \quad \omega = \frac{\sqrt{|R^2 - \frac{4L}{C}|}}{2L}$$

とし、次の場合に分けて議論する。

- $R^2 - \frac{4L}{C} > 0$  の場合 (超過減衰)

電流の一般解は

$$I(t) = \alpha_1 e^{-(\rho+\omega)t} + \alpha_2 e^{-(\rho-\omega)t}$$

で表され, 振動せず減少する.

- $R^2 - \frac{4L}{C} = 0$  の場合 (臨界減衰)

電流の一般解は

$$I(t) = (\alpha_1 + \alpha_2 t) e^{-\rho t}$$

となり, 超過減衰と類似した減衰特性となる.

- $R^2 - \frac{4L}{C} < 0$  の場合 (振動減衰)

一般解は

$$I(t) = e^{-\rho x} (\alpha_1 \cos \omega x + \alpha_2 \sin \omega x)$$

で表され, 振動しながら減衰していく.

- $R = 0$  の場合 (非減衰系)

$\rho = 0$  なので

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

とおくと, 電流の一般式は

$$I(t) = \alpha_1 \cos \omega_0 t + \alpha_2 \sin \omega_0 t$$

の単振動に簡略化される.

### 4.2.3 二階定係数線形非同次微分方程式

二階の線形非同次微分方程式

$$f''(x) + c_1 f'(x) + c_0 f(x) = g(x) \quad (4.8)$$

解を求めるために,  $g(x)$  と同じ形の式に係数をかけたものを特殊解と仮定して方程式を満足するように係数を決定する未定係数法を用いて解く.

式 (4.8) の同次微分方程式の特性方程式を

$$h(\lambda) = \lambda^2 + c_1 \lambda + c_0 = 0$$

とおき, 以下の場合について考える.

1.  $g(x) = \alpha e^{\rho x}$

(a)  $\rho$  が特性方程式の解でない場合

$$f(x) = \beta e^{\rho x}$$

とおくと

$$f'(x) = \beta \rho e^{\rho x}, \quad f''(x) = \beta \rho^2 e^{\rho x}$$

を (4.8) に代入して

$$f''(x) + c_1 f'(x) + c_0 f(x) = \beta(\rho^2 + c_1 \rho + c_0)e^{\rho x} = \beta h(\rho)e^{\rho x} = \alpha e^{\rho x}$$

を得る.  $\rho$  が特性方程式の解でない場合,  $h(\rho) \neq 0$  であるので

$$\beta h(\rho) = \alpha$$

より

$$f(x) = \frac{\alpha e^{\rho x}}{h(\rho)}$$

を得る.

(b)  $\rho$  が特性方程式の解である場合

$$f(x) = \beta c(x)e^{\rho x}$$

とおくと

$$\begin{cases} f'(x) = \beta e^{\rho x} (c'(x) + \rho c(x)) \\ f''(x) = \beta e^{\rho x} (c''(x) + 2\rho c'(x) + \rho^2 c(x)) \end{cases}$$

を (4.8) に代入して

$$\beta [c''(x) + (2\rho + c_1)c'(x)] = \alpha$$

を得る.

i.  $\rho$  が  $h(\lambda) = 0$  の重解でない場合

$$2\rho + c_1 \neq 0$$

となるので, 例えば

$$c(x) = x$$

とおくと, 特殊解は

$$f(x) = \frac{\alpha x e^{\rho x}}{2\rho + c_1}$$

となる.

ii.  $\rho$  が  $h(\lambda) = 0$  の重解である場合

$2\rho + c_1 = 0$  から

$$\beta c''(x) = \alpha$$

より, 例えば

$$c(x) = x^2$$

とおくと, 特殊解は

$$f(x) = \frac{\alpha x^2 e^{\rho x}}{2}$$

と表せる.

2.  $g(x) = \alpha \cos \omega x$  (もしくは  $g(x) = \alpha \sin \omega x$ )

(a)  $c_1 = 0$  かつ  $c_0 = \omega^2$  でない場合

$$f(x) = \alpha_1 \cos \omega x + \alpha_2 \sin \omega x \quad (4.9)$$

とおくと

$$f'(x) = -\alpha_1 \omega \sin \omega x + \alpha_2 \omega \cos \omega x, \quad f''(x) = -\alpha_1 \omega^2 \cos \omega x - \alpha_2 \omega^2 \sin \omega x$$

を (4.8) に代入して

$$[\alpha_1(c_0 - \omega^2) + \alpha_2 c_1 \omega] \cos \omega x + [\alpha_2(c_0 - \omega^2) - \alpha_1 c_1 \omega] \sin \omega x = \alpha \cos \omega x$$

を得る. 両辺を比較して  $\alpha_1$  と  $\alpha_2$  に関する連立方程式

$$\begin{cases} \alpha_1(c_0 - \omega^2) + \alpha_2 c_1 \omega = \alpha \\ \alpha_2(c_0 - \omega^2) - \alpha_1 c_1 \omega = 0 \end{cases}$$

から求めた  $\alpha_1$  と  $\alpha_2$  を (4.9) に代入して解を得る.

(b)  $c_1 = 0$  かつ  $c_0 = \omega^2$  の場合

$$f(x) = \alpha_1 x \cos \omega x + \alpha_2 x \sin \omega x$$

とおくと

$$\begin{cases} f'(x) = (\alpha_1 + \alpha_2 \omega x) \cos \omega x + (\alpha_2 - \alpha_1 \omega x) \sin \omega x \\ f''(x) = 2\alpha_2 \omega \cos \omega x - 2\alpha_1 \omega \sin \omega x - \omega^2 f(x) \end{cases}$$

および  $c_1 = 0, c_0 = \omega^2$  を (4.8) に代入して

$$2\alpha_2 \omega \cos \omega x - 2\alpha_1 \omega \sin \omega x = \alpha \cos \omega x$$

を得る. 両辺を比較すると

$$\begin{cases} \alpha_1 = 0 \\ \alpha_2 = \frac{\alpha}{2\omega} \end{cases}$$

となるので, これらを (4.9) に代入して解を得る.

3.  $g(x) = \beta_0 + \beta_1 x + \cdots + \beta_n x^n$

(a)  $c_0 \neq 0$  の場合

$$f(x) = \alpha_0 + \alpha_1 x + \cdots + \alpha_n x^n$$

とおくと

$$\begin{cases} f'(x) = \alpha_1 + 2\alpha_2 x + \cdots + n\alpha_n x^{n-1} \\ f''(x) = 2\alpha_2 + 3\alpha_3 \cdot 2x + \cdots + n\alpha_n \cdot (n-1)x^{n-2} \end{cases}$$

を (4.9) に代入して

$$\begin{aligned} & (2\alpha_2 + c_1 \alpha_1 + c_0 \alpha_0) + (3\alpha_3 \cdot 2 + c_1 2\alpha_2 + c_0 \alpha_1)x + (4\alpha_4 \cdot 3 + c_1 3\alpha_3 + c_0 \alpha_2)x^2 + \cdots + \\ & [n\alpha_n \cdot (n-1) + c_1(n-1)\alpha_{n-1} + c_0 \alpha_{n-2}]x^{n-2} + (c_1 n\alpha_n + c_0 \alpha_{n-1})x^{n-1} + c_0 \alpha_n x^n \\ & = \beta_0 + \beta_1 x + \beta_2 x^2 + \cdots + \beta_{n-2} x^{n-2} + \beta_{n-1} x^{n-1} + \beta_n x^n \end{aligned}$$



1.  $g_0(x) = 10e^{-2x}$  の特殊解を求めよ .
2.  $g_0(x) = 10e^{3x}$  の特殊解を求めよ .
3.  $g_0(x) = 10 \cos x$  の特殊解を求めよ .
4.  $g_0(x) = 6x + 1$  の特殊解を求めよ .

【解】

与えられた微分方程式に対応する同次方程式の特性方程式

$$\lambda^2 - 5\lambda + 6 = 0$$

は2つの異なる実解  $\lambda_1 = 2, \lambda_2 = 3$  を持つ .

1. 指数関数の係数  $-2$  は, 特性方程式のいずれの解とも異なるので, 特殊解を

$$f(x) = \beta e^{-2x}$$

とおき

$$f'(x) = -2\beta e^{-2x}, \quad f''(x) = 4\beta e^{-2x}$$

を与えられた方程式の右辺に代入すると

$$4\beta e^{-2x} + 10\beta e^{-2x} + 6\beta e^{-2x} = 10\beta e^{-2x}$$

となるので, 右辺と比較して  $\beta = \frac{1}{2}$  を得る . したがって, 特殊解は

$$f(x) = \frac{1}{2}e^{-2x}$$

である .

2. 指数関数の係数  $3$  は, 対応する同次方程式の特性方程式の実解の1つと一致するので, 特殊解を

$$f(x) = \beta x e^{3x}$$

とおいて

$$f'(x) = \beta e^{3x} + 3\beta x e^{3x}, \quad f''(x) = 6\beta e^{3x} + 9\beta x e^{3x}$$

を得る . これらを与えられた方程式に代入すると

$$\beta e^{3x} = 10e^{3x}$$

となるので, 特殊解は

$$f(x) = 10x e^{3x}$$

である .

3.  $\omega = 1$  は対応する同次方程式の特性方程式の解ではないので, 特殊解を

$$f(x) = \alpha_1 \cos x + \alpha_2 \sin x$$

とおいて

$$f'(x) = -\alpha_1 \sin x + \alpha_2 \cos x, \quad f''(x) = -\alpha_1 \cos x - \alpha_2 \sin x$$

を方程式の左辺に代入して

$$5(\alpha_1 - \alpha_2) \cos x + 5(\alpha_1 + \alpha_2) \sin x = 10 \cos x$$

を得る．両辺を比較して  $\alpha_1 = 1$  と  $\alpha_2 = -1$  となるので特殊解は

$$f(x) = \cos x - \sin x$$

で表せる．

4.  $c_0 \neq 0$  であるので

$$f(x) = \alpha_0 + \alpha_1 x$$

とにおいて

$$f'(x) = \alpha_1, \quad f''(x) = 0$$

を方程式の左辺に代入して

$$(6\alpha_0 - 5\alpha_1) + 6\alpha_1 x = 1 + 6x$$

を得る．両辺を比較して  $\alpha_1 = 1$  と  $\alpha_0 = 1$  となるので特殊解は

$$f(x) = x + 1$$

である．

## 演習問題

- 時刻  $t = 0$  に，抵抗  $R$ ，コイル  $L$  およびコンデンサ  $C$  が電源  $E$  と直列した回路のスイッチを on にしたと仮定する．時刻  $t$  でのコンデンサーの電荷を  $Q(t)$  とおいた時， $Q(t)$  が満たす微分方程式を求めよ．
- 積分因子法および定数変化法を用いて微分方程式

$$xf'(x) + f(x) + x(x^2 - 1) = 0$$

を解け．

- 微分方程式

$$xf(x)(1 + x^2)f'(x) = 1 - f^2(x)$$

の解を求めよ．

- $\tan^{-1} x$  の導関数を求め，微分方程式

$$xdf(x) = [x^2 + f^2(x) + f(x)]dx$$

を解け．



5. 次の微分方程式を解け .

(a)  $6f''(x) + f'(x) - f(x) = 0, \quad f(x)|_{x=0} = -2, f'(x)|_{x=0} = -4$

(b)  $4f''(x) - 4f'(x) + f(x) = 0, \quad f(x)|_{x=0} = 1, f'(x)|_{x=0} = 0$

(c)  $16f''(x) + f(x) = 0, \quad f(x)|_{x=\pi} = \sqrt{2}, f'(x)|_{x=0} = 1$

6. RLC 回路において,  $R = 80\Omega, L = 20H, C = 0.01F$ , 回路にかかる電圧  $E = 100V$  であるとする . 初期電流  $I(0) = 0A$ , 初期電荷  $Q(0) = 0C$  として電流  $I(t)$  を求めよ .

7. 長さ  $l$ , 質量  $m$  の単振り子の運動方程式は

$$m\ell\theta''(t) = -mg \sin \theta(t)$$

で与えられる . ここで,  $\theta(t)$  は時刻  $t$  における振り子と鉛直線のなす角度である .  $\theta(t)$  が充分小さく  $\sin \theta(t) \approx \theta(t)$  とおける場合

(a) 振り子を  $\theta(0) = \theta_0$  で静かにはなした時の  $\theta(t)$  を求めよ .

(b) 振り子の周期  $T$  を求めよ .

8. 二階非同次微分方程式

$$f''(x) - 4f'(x) + 4f(x) = 3e^{-3x}$$

の特殊解を求めよ .

9. 二階非同次微分方程式

$$f''(x) + 4f'(x) + 5f(x) = \sin x$$

の一般解(資料 p.47 の定理 5 参照) を求めよ .

10. 微分方程式

$$f''(x) + f'(x) - 6f(x) = -6x$$

の特殊解を求めよ .

11. 二階微分方程式

$$f''(x) - f'(x) - 2f(x) = g(x)$$

について次の問に答えよ .

(a)  $g(x) = 0$  のとき, 対応する特性方程式の解を求めよ .

(b)  $g(x) = 0$  のとき, 微分方程式の一般解を求めよ .

(c)  $g(x) = 4 \sin x$  のとき, 特殊解の一つを求めよ .

(d)  $g(x) = 4 \sin x$  のとき, 一般解を求めよ .

12. 二階微分方程式

$$f''(x) + c_0^2 f(x) = g(x)$$

について次の問に答えよ . ( $c_0$  は定数で,  $c_0 > 0$ )

(a)  $g(x) = 0$  のとき, 対応する特性方程式の解を求めよ .

(b)  $g(x) = 0$  のとき, 微分方程式の一般解を求めよ .

(c) 定数  $\beta$  と  $\omega$  に対して,  $g(x) = \beta \cos \omega x$  としたとき

i.  $\omega \neq c_0$  の場合の特殊解の一つを求めよ .

ii.  $\omega = c_0$  の場合の特殊解の一つを求めよ .

(d) 上の結果から  $f''(x) + c_0^2 f(x) = \beta \cos \omega x$  の一般解を表わせよ .

## 第5章

# 偏微分方程式

偏微分方程式

定義 35. 二つ以上の変数  $x, y, \dots$  とその関数  $f(x, y, \dots)$  及び関数の導関数

$$\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \dots, \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}, \dots, \frac{\partial^n f}{\partial x^n}, \frac{\partial^n f}{\partial x^{n-1} \partial y}, \dots$$

を含む関係式

$$g\left(x, y, \dots, f, \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \dots, \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}, \dots, \frac{\partial^n f}{\partial x^n}, \frac{\partial^n f}{\partial x^{n-1} \partial y}, \dots\right) = 0$$

を  $f$  に関する偏微分方程式という。また、偏微分方程式での偏導関数の最高階が  $n$  であるとき、 $n$  階の偏微分方程式という。

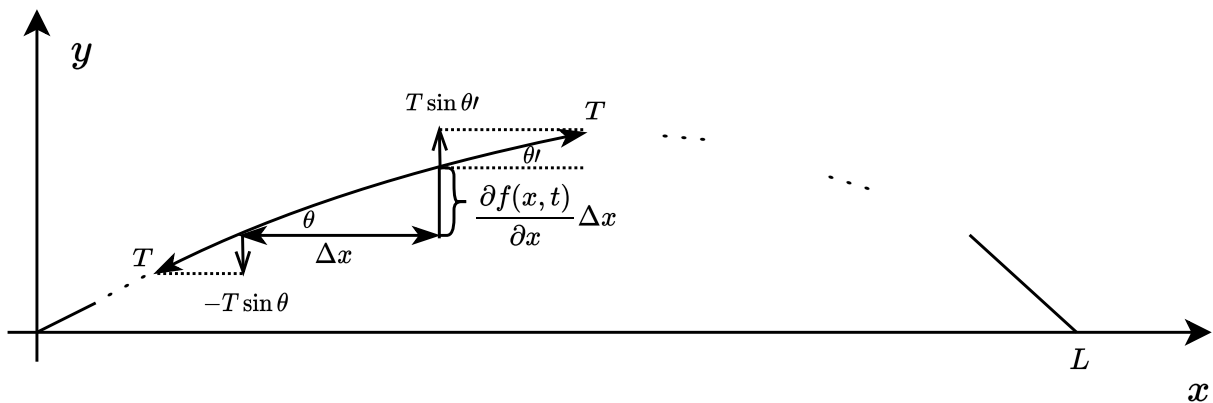


図 5.1 弦の運動方程式

例 27.  $x$  軸の 0 と  $L$  点に張った弦に時刻  $t = 0$  で  $y$  軸の方向に少変位  $f(x, 0) = y_0$  を与えたとき，弦の運動が満たす方程式  $f(x, t)$  を導け．

【回答】

弦の密度を  $\rho$  とすれば，少変異の場合質量は

$$\Delta m = \rho \sqrt{1 + \left( \frac{\partial f(x, t)}{\partial x} \right)^2} \Delta x \approx \rho \Delta x$$

で近似できる．

弦の張力を  $T$  とすると，座標  $x$  と  $x + \Delta x$  で働く力の  $y$  軸成分はそれぞれ  $-T \sin \theta$  と  $T \sin \theta'$  であるので，ニュートンの第二法則により

$$\Delta m \frac{\partial^2 f(x, t)}{\partial t^2} = T(\sin \theta' - \sin \theta)$$

となるので

$$\rho \frac{\partial^2 f(x, t)}{\partial t^2} = \frac{T(\sin \theta' - \sin \theta)}{\Delta x}$$

が成り立つ．

ここで， $\theta$  と  $\theta'$  が小さい場合

$$\begin{aligned} \sin \theta &\approx \tan \theta = \frac{\partial f(x, t)}{\partial x} \\ \sin \theta' &\approx \tan \theta' = \frac{\partial f(x + \Delta x, t)}{\partial x} \end{aligned}$$

となるので

$$\frac{\partial^2 f(x, t)}{\partial t^2} = \frac{T}{\rho} \frac{\partial^2 f(x, t)}{\partial x^2}$$

が得られる．

両端を固定しているので

$$f(0, t) = f(L, t) = 0$$

で，初期変位の条件より

$$f(x, 0) = y_0, \quad \frac{\partial f(x, 0)}{\partial t} = 0$$

となる．

例 28. 電束密度を  $D(t)$ , 磁束密度を  $B(t)$ , 電場の強度を  $E(t)$ , 磁場の強度を  $H(t)$  とし, Maxwell の方程式を考える.

式 (5.1) と (5.2) は, 閉じた曲面  $S$  に囲まれた領域を  $V$  とすると, 領域  $V$  からでていく電束密度  $D(t)$  と磁束密度の総和が内部電荷密度  $\rho$  の総和および零と等しいことを表す.

$$\iint_S \mathbf{D}(t) \cdot d\mathbf{S} = \iiint_V \rho dx dy dz \quad (5.1)$$

$$\iint_S \mathbf{B}(t) \cdot d\mathbf{S} = 0 \quad (5.2)$$

この二つの式にガウスの発散定理を適用すると

$$\iiint_V (\nabla \cdot \mathbf{D}(t) - \rho) dx dy dz = 0$$

$$\iiint_V \nabla \cdot \mathbf{B}(t) dx dy dz = 0$$

より, 微分形式

$$\nabla \cdot \mathbf{D}(t) = \rho$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B}(t) = 0$$

が得られる.

一方, 式 (5.3) と (5.4) は, 曲面  $S$  を縁どる閉じた曲線  $C$  に沿った磁場の積分は, その面を通過する電流密度と電束密度の時間変動の和, 電場の場合には磁束の変動の和に等しいことを表す.

$$\oint_C \mathbf{H}(t) \cdot d\mathbf{c} = \iint_S \left( \mathbf{i}(t) + \frac{\partial \mathbf{D}(t)}{\partial t} \right) \cdot d\mathbf{S} \quad (5.3)$$

$$\oint_C \mathbf{E}(t) \cdot d\mathbf{c} = - \iint_S \frac{\partial \mathbf{B}(t)}{\partial t} \cdot d\mathbf{S} \quad (5.4)$$

この二つの式にストークス定理を適用すると

$$\iint_S \left( \nabla \times \mathbf{H}(t) - \mathbf{i}(t) - \frac{\partial \mathbf{D}(t)}{\partial t} \right) \cdot d\mathbf{S} = 0$$

$$\iint_S \left( \nabla \times \mathbf{E}(t) + \frac{\partial \mathbf{B}(t)}{\partial t} \right) \cdot d\mathbf{S} = 0$$

より, 微分形式

$$\nabla \times \mathbf{H}(t) = \mathbf{i}(t) + \frac{\partial \mathbf{D}(t)}{\partial t}$$

$$\nabla \times \mathbf{E}(t) = - \frac{\partial \mathbf{B}(t)}{\partial t}$$

を得る.

常微分方程式と偏微分法定式を合わせて微分方程式というが、微分方程式を満たす関数をその微分方程式の解という。

## 5.1 二階線形偏微分方程式

変数  $x$  と  $y$  の関数を  $g_{xx}(x, y), g_{xy}(x, y), g_{yy}(x, y), g_x(x, y), g_y(x, y), g_0(x, y), g(x, y)$  とし,  $\alpha, \beta$  で定数を表す。

### 二階線形偏微分方程式

定義 36. 変数  $x, y$ , 関数  $f(x, y)$  および二階までの導関数の関係式が

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_2[f(x, y)] := & g_{xx}(x, y) \frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial x^2} + g_{xy}(x, y) \frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial x \partial y} + g_{yy}(x, y) \frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial y \partial y} \\ & + g_x(x, y) \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} + g_y(x, y) \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} + g_0(x, y) f(x, y) = g(x, y) \end{aligned} \quad (5.5)$$

の形で表せる微分方程式を二階線形偏微分方程式という。  $g(x, y) = 0$  のとき, 同次であるといい,  $g(x, y) \neq 0$  のときは非同次という。  $\mathcal{L}_2$  は表記の簡略化のために導入した二階の線形偏微分演算子である。

#### 【性質】

$f_1(x, y)$  と  $f_2(x, y)$  を二階の線形同次偏微分方程式の解とすると, 任意の定数  $\alpha_1, \alpha_2$  に対して

$$\mathcal{L}_2[\alpha_1 f_1(x, y) + \alpha_2 f_2(x, y)] = \alpha_1 \mathcal{L}_2[f_1(x, y)] + \alpha_2 \mathcal{L}_2[f_2(x, y)] = 0$$

が成り立ち, 任意の2つの解の一次結合も解となる。

#### 【分類】

二階線形偏微分方程式の一般解の性質は, 二階導関数の係数  $g_{xx}(x, y), g_{xy}(x, y)$  及び  $g_{yy}(x, y)$  によって決定され,  $\gamma := g_{xy}^2(x, y) - 4g_{xx}(x, y)g_{yy}(x, y)$  によって以下のように分類される。

- 双曲型 ( $\gamma > 0$ )

波動方程式 ( $\gamma = 4c^2$ )

$$\frac{\partial^2 f(x, t)}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 f(x, t)}{\partial x^2} = 0 \quad (5.6)$$

- 放物面型 ( $\gamma = 0$ )

拡散方程式 ( $\gamma = 0$ )

$$\frac{\partial f(x, t)}{\partial t} - c^2 \frac{\partial^2 f(x, t)}{\partial x^2} = 0 \quad (5.7)$$

- 楕円型 ( $\gamma < 0$ )

二次元ラプラス方程式 ( $\gamma = -4$ )

$$\frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial y^2} = 0 \quad (5.8)$$

## 5.2 波動方程式の解

波動方程式 (5.6) を変数分離法を用いて解くために解を

$$f(x, t) = f_x(x)f_t(t)$$

と仮定する .

各偏微分を計算すると

$$\begin{cases} \frac{\partial f(x, t)}{\partial x} = f'_x(x)f_t(t) \text{ and } \frac{\partial^2 f(x, t)}{\partial x^2} = f''_x(x)f_t(t) \\ \frac{\partial f(x, t)}{\partial t} = f'_t(t)f_x(x) \text{ and } \frac{\partial^2 f(x, t)}{\partial t^2} = f''_t(t)f_x(x) \end{cases} \quad g_{xy}(x, y) \frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial x \partial y}$$

となるので, (5.6) は

$$f_x(x)f''_t(t) = c^2 f''_x(x)f_t(t) \Leftrightarrow \frac{1}{c^2} \frac{1}{f_t(t)} f''_t(t) = \frac{1}{f_x(x)} f''_x(x) \quad (5.9)$$

すべての  $x$  と  $t$  に等式が成り立つためには, (6.15) が定数になる必要があるので, その値を  $-\mu$  とおき, 2つの常微分方程式

$$\begin{cases} f''_x(x) + \mu f_x(x) = 0 \\ f''_t(t) + c^2 \mu f_t(t) = 0 \end{cases} \quad (5.10)$$

を得る . その特性方程式は

$$\begin{cases} \lambda^2 + \mu = 0 \\ \lambda^2 + c^2 \mu = 0 \end{cases}$$

となり,  $\omega = \sqrt{|\mu|}$  とおくとそれぞれの一般解は

- $\mu > 0$  のとき

$$\begin{cases} f_x(x) = \alpha_1 \cos \omega x + \alpha_2 \sin \omega x \\ f_t(t) = \beta_1 \cos c\omega t + \beta_2 \sin c\omega t \end{cases} \quad (5.11)$$

- $\mu = 0$  のとき

$$\begin{cases} f_x(x) = \alpha_1 x + \alpha_2 \\ f_t(t) = \beta_1 t + \beta_2 \end{cases}$$

- $\mu < 0$  のとき

$$\begin{cases} f_x(x) = \alpha_1 e^{\omega x} + \alpha_2 e^{-\omega x} \\ f_t(t) = \beta_1 e^{c\omega t} + \beta_2 e^{-c\omega t} \end{cases}$$

従って, 任意の正の定数  $\omega$  にたいして, 一般解は

$$f(x, t) = \begin{cases} (\alpha_1 \cos \omega x + \alpha_2 \sin \omega x)(\beta_1 \cos c\omega t + \beta_2 \sin c\omega t) & \mu > 0 \\ (\alpha_1 x + \alpha_2)(\beta_1 t + \beta_2) & \mu = 0 \\ (\alpha_1 e^{\omega x} + \alpha_2 e^{-\omega x})(\beta_1 e^{c\omega t} + \beta_2 e^{-c\omega t}) & \mu < 0 \end{cases} \quad (5.12)$$

で表せる .

## 5.2.1 境界条件が与えられた場合の解

定理 6. 定数  $c$  に対して区間  $[a, b]$  において,  $f(x) = 0$  以外に, 微分方程式

$$\begin{cases} f''(x) + cf(x) = 0 \\ f(a) = f(b) = 0 \end{cases}$$

を満たす関数が存在する必要十分条件は

$$c = \left( \frac{m\pi}{b-a} \right)^2$$

( $m$  は正の整数) である.

## 【証明】

## ● 必要性

$\omega = \sqrt{|c|}$  とおくと

1.  $c < 0$  の場合

一般解は

$$f(x) = \alpha_1 e^{\omega x} + \alpha_2 e^{-\omega x}$$

となり, 初期条件より  $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$  なので,

$$f(x) = 0$$

である.

2.  $c = 0$  の場合

一般解は

$$f(x) = \alpha_1 x + \alpha_2$$

となり, 初期条件より  $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$  なので

$$f(x) = 0$$

3.  $c > 0$  の場合

一般解は

$$f(x) = \alpha_1 \cos \omega x + \alpha_2 \sin \omega x$$

となるので, 初期条件より

$$\begin{cases} \alpha_1 \cos \omega a + \alpha_2 \sin \omega a = 0 \\ \alpha_1 \cos \omega b + \alpha_2 \sin \omega b = 0 \end{cases}$$

を得られるので,  $\alpha_1$  および  $\alpha_2$  に対して代入すると

$$\sin[\pm\omega(a-b)] = 0$$

となるので

$$c = \left( \frac{m\pi}{b-a} \right)^2$$

である．

- 充分性

$$c = \left( \frac{m\pi}{b-a} \right)^2$$

の場合， $\omega = \sqrt{|c|}$  とおく．

初期条件  $f(a) = 0$  を満たすように一般解  $f(x) = \alpha_1 \cos \omega x + \alpha_2 \sin \omega x$  に対して

$$\alpha_1 = -\sin \omega a, \quad \alpha_2 = \cos \omega a$$

とし，関数

$$\begin{aligned} f(x) &= -\sin \omega a \cos \omega x + \cos \omega a \sin \omega x \\ &= \sin \omega(x-a) \\ &= \sin \left( m\pi \frac{x-a}{b-a} \right) \end{aligned}$$

を考察すると

$$\cos \omega b = \cos(\omega(a-b) + \omega a) = (-1)^m \cos \omega a$$

および

$$\sin \omega b = \sin(\omega(b-a) + \omega a) = (-1)^m \sin \omega a$$

より，条件  $f(a) = f(b) = 0$  を満たす．

例 29. 両端を固定した長さ  $L$  の弦の動きを  $f(x, t)$  とすると，微分方程式 (5.6) と境界条件

$$f(0, t) = f(L, t) = 0$$

を満たす．変数分離法を用いて計算すると，(6.15) での  $f(x)$  に関する方程式は

$$\mu = \left( \frac{m\pi}{L} \right)^2$$

のときのみ， $f(x) = 0$  でない解を持つ．故に，一般式は

$$f(x, t) = \sum_{m=1}^{\infty} \sin \frac{m\pi x}{L} \left( \beta_{1,m} \cos \frac{m\pi ct}{L} + \beta_{2,m} \sin \frac{m\pi ct}{L} \right) \quad (5.13)$$

で与える．



### 5.3 拡散方程式の解

拡散方程式 (5.7) においても、同じく解を

$$f(x, t) = f_x(x)f_t(t)$$

と仮定すると、偏微分は

$$\begin{cases} \frac{\partial f(x, t)}{\partial x} = f'_x(x)f_t(t) \text{ and } \frac{\partial^2 f(x, t)}{\partial x^2} = f''_x(x)f_t(t) \\ \frac{\partial f(x, t)}{\partial t} = f'_t(t)f_x(x) \end{cases}$$

より、(5.7) は

$$f_x(x)f'_t(t) = c^2 f''_x(x)f_t(t) \Leftrightarrow \frac{1}{c^2} \frac{1}{f_t(t)} f'_t(t) = \frac{1}{f_x(x)} f''_x(x) = -\mu \quad (5.14)$$

とおくと、2つの常微分方程式

$$\begin{cases} f''_x(x) + \mu f_x(x) = 0 \\ f'_t(t) + c^2 \mu f_t(t) = 0 \end{cases}$$

が得られる。

ここで、最初の式の特性方程式

$$\lambda^2 + \mu = 0$$

から  $\omega = \sqrt{|\mu|}$  とおくと、 $f_x(x)$  の一般解は

$$f_x(x) = \begin{cases} \alpha_1 \cos \omega x + \alpha_2 \sin \omega x & \mu > 0 \\ \alpha_1 x + \alpha_2 & \mu = 0 \\ \alpha_1 e^{\omega x} + \alpha_2 e^{-\omega x} & \mu < 0 \end{cases} \quad (5.15)$$

$f_t(t)$  の一般式は

$$f_t(t) = \beta e^{-c^2 \mu t}$$

と書ける。

従って、任意の正の定数  $\omega$  にたいして、一般解は

$$f(x, t) = \begin{cases} (\alpha_1 \cos \omega x + \alpha_2 \sin \omega x) e^{-c^2 \omega^2 t} \\ \alpha_1 x + \alpha_2 \\ (\alpha_1 e^{\omega x} + \alpha_2 e^{-\omega x}) e^{c^2 \omega^2 t} \end{cases}$$

と表せる。

例 30. 時刻  $t = 0$  で、長さ 1 の薄い銅 ( $c^2 = 1.14$ ) の板の温度  $f(x, 0)$  は

$$2 \sin 3\pi x + 5 \sin 8\pi x, \quad 0 \leq x \leq 1$$

である．板の両端を氷に固定し温度  $0^\circ\text{C}$  に維持される場合，任意の時刻  $t > 0$  における温度  $f(x, t)$  を求めよ．

【解】変数分離法で

$$f(x, t) = f_x(x)f_t(t)$$

とおくと

$$\begin{cases} f_x''(x) + \mu f_x(x) = 0 \\ f_t'(t) + c^2 \mu f_t(t) = 0 \end{cases}$$

が得られる．最初の方程式の境界条件

$$f_x(0) = f_x(1) = 0$$

は

$$\mu = (m\pi)^2$$

のときのみ， $f_x(x) = 0$  でない解を持つ．故に，一般式は

$$f(x, t) = \sum_{m=1}^{\infty} (\alpha_{1,m} \cos m\pi x + \alpha_{2,m} \sin m\pi x) e^{-c^2 m^2 \pi^2 t}$$

で与える．初期条件

$$f(x, 0) = 2 \sin 3\pi x + 5 \sin 8\pi x, \quad 0 \leq x \leq 1$$

は

$$\alpha_{n,m} = \begin{cases} 2, & n = 2, m = 3 \\ 5, & n = 2, m = 8 \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$$

なので

$$f(x, t) = 2 \sin(3\pi x) e^{-9(1.14)\pi^2 t} + 5 \sin(8\pi x) e^{-64(1.14)\pi^2 t}$$

である．

## 5.4 ラプラス方程式の解

直行座標系での二次元ラプラス方程式 (5.8) においては, 変数変換

$$\begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \end{cases}$$

を用いると, 極座標系でのラプラス方程式は

$$\frac{\partial^2 f(r, \theta)}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial f(r, \theta)}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 f(r, \theta)}{\partial \theta^2} = 0 \quad (5.16)$$

となるが,  $\theta$  は周期境界条件

$$f(r, \theta + 2\pi) = f(r, \theta)$$

を満たさないといけない.

ここでも変数分離法を用いて

$$f(r, \theta) = f_r(r) f_\theta(\theta)$$

を解と仮定する.

$$\begin{cases} \frac{\partial f(r, \theta)}{\partial r} = f_r'(r) f_\theta(\theta) \text{ and } \frac{\partial^2 f(r, \theta)}{\partial r^2} = f_r''(r) f_\theta(\theta) \\ \frac{\partial f(r, \theta)}{\partial \theta} = f_\theta'(\theta) f_r(r) \text{ and } \frac{\partial^2 f(r, \theta)}{\partial \theta^2} = f_\theta''(\theta) f_r(r) \end{cases}$$

より, (5.16) は

$$\begin{aligned} f_r''(r) f_\theta(\theta) + \frac{1}{r} f_r'(r) f_\theta(\theta) + \frac{1}{r^2} f_r(r) f_\theta''(\theta) &= 0 \\ \Leftrightarrow \frac{r^2}{f_r(r)} f_r''(r) + \frac{r}{f_r(r)} f_r'(r) &= -\frac{1}{f_\theta(\theta)} f_\theta''(\theta) = \mu \end{aligned} \quad (5.17)$$

となるので, 2つの常微分方程式

$$\begin{cases} r^2 f_r''(r) + r f_r'(r) - \mu f_r(r) = 0 \\ f_\theta''(\theta) + \mu f_\theta(\theta) = 0 \end{cases}$$

を得る.

最初の微分方程式は, オイラー型の微分方程式とよぶが,

$$r = e^s$$

とおくと

$$\begin{cases} f_r'(s) = f_r'(r) r'(s) = r f_r'(r) \\ f_r''(s) = (f_r'(r) + r f_r''(r)) r = r^2 f_r''(r) + r f_r'(r) \end{cases}$$

より

$$f_r''(s) - \mu f_r(s) = 0$$

と書ける.

特性方程式

$$\begin{cases} \lambda^2 - \mu = 0 \\ \lambda^2 + \mu = 0 \end{cases}$$

が得られる.

$\omega = \sqrt{|\mu|}$  とおくと

- $\mu > 0$  のとき

$$\begin{cases} f_r(s) = \alpha_1 e^{\omega s} + \alpha_2 e^{-\omega s} \\ f_\theta(\theta) = \beta_1 \cos \omega \theta + \beta_2 \sin \omega \theta \end{cases}$$

- $\mu = 0$  のとき

$$\begin{cases} f_r(s) = \alpha_1 s + \alpha_2 \\ f_\theta(\theta) = \beta_1 \theta + \beta_2 \end{cases}$$

- $\mu < 0$  のとき

$$\begin{cases} f_r(s) = \alpha_1 \cos \omega s + \alpha_2 \sin \omega s \\ f_y(y) = \beta_1 e^{\omega y} + \beta_2 e^{-\omega y} \end{cases}$$

$s = \ln r$  を代入すると, 任意の正の定数  $\omega$  にたいして, 一般解は

$$f(r, \theta) = \begin{cases} (\alpha_1 r^\omega + \alpha_2 r^{-\omega})(\beta_1 \cos \omega \theta + \beta_2 \sin \omega \theta) \\ (\alpha_1 \ln r + \alpha_2)(\beta_1 \theta + \beta_2) \\ (\alpha_1 \cos \omega \ln r + \alpha_2 \sin \omega \ln r)(\beta_1 e^{\omega \theta} + \beta_2 e^{-\omega \theta}) \end{cases}$$

と表せる.

例 31. 長方形領域  $\mathbb{D} : ((x, y))_{x=0, y=0}^{a, b}$  における二次元ラプラス方程式

$$\frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial y^2} = 0$$

の境界条件が

$$f(0, y) = f(a, y) = 0$$

と与えられたとき,  $f(x, y)$  の一般解を求めよ.

【解】

変数分離法で

$$f(x, y) = f_x(x)f_y(y)$$

とおくと

$$\begin{cases} f_x''(x) + \mu f_x(x) = 0 \\ f_y''(y) - \mu f_y(y) = 0 \end{cases}$$

が得られる．最初の方程式の境界条件

$$f_x(0) = f_x(a) = 0$$

は

$$\mu = \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2$$

のときのみ， $f_x(x) = 0$  でない解を持つので

$$f_x(x) = \sum_{m=1}^{\infty} \alpha_m \sin \frac{m\pi x}{a}$$

で与えられ，そのとき

$$f_y(y) = \sum_{m=1}^{\infty} \left( \beta_{1,m} e^{\frac{m\pi y}{a}} + \beta_{2,m} e^{-\frac{m\pi y}{a}} \right)$$

となるので，一般解は

$$f(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} \sin \frac{m\pi x}{a} \left( \beta_{1,m} e^{\frac{m\pi y}{a}} + \beta_{2,m} e^{-\frac{m\pi y}{a}} \right)$$

で表せる．

## 演習問題

1. 偏微分方程式

$$\frac{\partial f(x, y)}{\partial x} - \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} = 0$$

の一般解  $f(x, y)$  を変数分離法を用いて求めよ．

2. 変数分離法を用いて

$$\frac{\partial f(x, y)}{\partial x} + \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} = (x + y)f(x, y)$$

の一般解を求めよ．

3. 一次元波動方程式を以下の条件の下で解け．

- 境界条件； $f(0, t) = f(L, t) = 0$
- 初期条件； $f(x, 0) = \sin \frac{m\pi x}{L}$ ,  $\left. \frac{\partial f(x, t)}{\partial t} \right|_{t=0} = 0$

4. 両端が固定された長さ  $L$  の弦において，時刻  $t = 0$  での  $x$  点の位置が  $\sin \frac{m\pi x}{L}$  で表され，速度が 0 の場合，この弦が満たす波動方程式を求めよ．

5. 両端の温度が 0 に固定された長さ  $L$  の棒の温度がしたがう一次元拡散方程式の一般解を求めよ．

## 6. 一次元拡散方程式

$$\frac{\partial f(x,t)}{\partial t} - c^2 \frac{\partial^2 f(x,t)}{\partial x^2} = 0$$

について，以下の問に答えよ．

(a) 一般解 (解の一次結合形式) を求めよ．

(b) 境界条件

$$f(0,t) = f(L,t) = A$$

が与えられた時の一般解を求めよ．ただし， $A, L$  は定数とする．

(c) 上記の境界条件に加えて，初期条件

$$f(x,0) = A + \sin \frac{\pi x}{L}$$

が与えられた時の解を求めよ．

## 7. 境界条件が

$$f(0,t) = 0, \quad f(L,t) + h \left. \frac{\partial f(x,t)}{\partial x} \right|_{x=L} = 0, \quad 0 < t < \infty$$

と与えられるとき，長さ  $L$  の棒の温度がしたがう一次元拡散方程式の一般解を求めよ．

## 8. 空間の二次元熱方程式は

$$\frac{\partial f(x,y,t)}{\partial t} = \alpha^2 \left( \frac{\partial^2 f(x,y,t)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f(x,y,t)}{\partial y^2} \right)$$

で表せる．

(a)  $f(x,y,t) = f_x(x)f_y(y)f_t(t)$  とおいて， $f_x(x), f_y(y), f_t(t)$  が満たす常微分方程式を求めよ．

(b) 境界条件  $f(0,y,t) = f(a,y,t) = f(x,0,t) = f(x,b,t) = 0$  を満たす  $f(x,y,t)$  の表現式を求めよ．

## 9. 拡散方程式

$$\frac{\partial f(x,t)}{\partial t} - c^2 \frac{\partial^2 f(x,t)}{\partial x^2} = 0, \quad 0 \leq x \leq \pi$$

の初期値が連続可微分関数  $g(x)$  で与えられるとき，以下の条件のもとで一般解を求めよ．

(a)  $f(0,t) = f(\pi,t) = 0$  .

(b)  $f(0,t) = 0, f(\pi,t) = \alpha$ , ただし  $\alpha$  は定数 .

(c)  $\left. \frac{\partial f(x,t)}{\partial x} \right|_{x=0} = \left. \frac{\partial f(x,t)}{\partial x} \right|_{x=\pi} = 0$  .

## 10. 二次元ラプラス方程式

$$\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y^2} = 0$$

について，以下の問に答えよ．

(a)  $f(x,y) = f_x(x)f_y(y)$  とおき，変数分離法を用いて，ラプラス方程式が満たすべき連立常微分方程式を書け．

(b) ラプラス方程式の一般解を求めよ．

(c) 定数  $L$  に対して，境界条件  $f(x,0) = f(x,L) = 0$  が与えられたとき， $f(x) = 0$  以外に連立常微分方程式を満たす関数  $f(x)$  が存在するために満たすべき条件を記述せよ (過程は省略可) .

(d) 境界条件  $f(x, 0) = f(x, 2) = 0$  が与えられたとき, ラプラス方程式の一般解を求めよ.

(e) 境界条件

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x, y) = 0, f(x, 0) = f(x, L) = 0$$

を満たす一般解を導け.

## 第 6 章

# ラプラス変換とフーリエ変換の応用

### 6.1 ラプラス変換

ラプラス変換

定義 37. 変数  $x$  の原関数  $f(x)$  に対して, 像関数  $F(s)$  へのラプラス変換は  $s$  の関数

$$\mathcal{L}[f(x)] = \int_0^{\infty} e^{-sx} f(x) dx := F(s)$$

で定義される.

微分方程式でよく見られる関数のラプラス変換を表 6.1 でまとめる.

表 6.1 ラプラス変換表

| 原関数 $f(x)$                     | 像関数 $F(s)$   |
|--------------------------------|--|
| 1                              | $\frac{1}{s} \quad s > 0$                            |
| $x^n \quad n \in \mathbb{Z}^+$ | $\frac{n!}{s^{n+1}} \quad s > 0$                     |
| $x^t \quad t > -1$             | $\frac{\Gamma(t+1)}{s^{t+1}} \quad t > 0$            |
| $e^{\alpha x}$                 | $\frac{1}{s-\alpha} \quad s > \alpha$                |
| $x e^{\alpha x}$               | $\frac{1}{(s-\alpha)^2} \quad s > \alpha$            |
| $\cos \omega x$                | $\frac{s}{s^2 + \omega^2} \quad s > 0$               |
| $\sin \omega x$                | $\frac{\omega}{s^2 + \omega^2} \quad s > 0$          |
| $\cosh \alpha x$               | $\frac{s}{s^2 - \alpha^2} \quad s > \alpha$          |
| $\sinh \alpha x$               | $\frac{\alpha}{s^2 - \alpha^2} \quad s > \alpha$     |
| $e^{\alpha x} \cos \omega t$   | $\frac{s-a}{(s-a)^2 + \omega^2} \quad s > \alpha$    |
| $e^{\alpha x} \sin \omega t$   | $\frac{\omega}{(s-a)^2 + \omega^2} \quad s > \alpha$ |



## 6.2 ラプラス変換の性質

表 6.2 は、微分方程式の解を求める際によく使われるラプラス変換を示す。

表 6.2 ラプラス変換の性質

| 原関数 $f(x)$                          | 像関数 $F(s)$   |
|-------------------------------------|--|
| $\alpha_1 f_1(x) + \alpha_2 f_2(x)$ | $\alpha_1 F_1(s) + \alpha_2 F_2(s)$  |
| $f'(x)$                             | $sF(s) - f(0)$   |
| $f''(x)$                            | $s^2 F(s) - sf(0) - f'(x) _{x=0}$  |
| $\int_0^x f(t)dt$                   | $\frac{1}{s} F(s)$   |
| $e^{\alpha x} f(x)$                 | $F(s - \alpha)$  |
| $u(x - \alpha)f(x - \alpha)$        | $e^{-\alpha s} F(s)$   |
| $f\left(\frac{x}{\alpha}\right)$    | $\alpha F(\alpha s)$   |
| $\int_0^x f_1(t)f_2(x - t)dt$       | $F_1(s)F_2(s)$   |
| $f_1(x)f_2(x)$                      | $\frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma - j\infty}^{\sigma + j\infty} F_1(p)F_2(s - p)dp$ |
| $xf(x)$                             | $-F'(s)$   |
| $\frac{f(x)}{x}$                    | $\int_s^\infty F(p)dp$   |

ただし、 $u(x - \alpha)$  は

$$u(x - \alpha) = \begin{cases} 0 & x < \alpha \\ 1 & x \geq \alpha \end{cases}$$

と定義される階段関数である。

原関数  $f(x)$  の微分のラプラス変換を考えると

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[f'(x)] &= \int_0^\infty e^{-sx} f'(x) dx \stackrel{\text{部分積分}}{=} [e^{-sx} f(x)]_0^\infty + s \int_0^\infty f(x) e^{-sx} dx \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \{e^{-sx} f(x)\} - f(0) + sF(s) \end{aligned}$$

で表せるが、 $s > 0$  のとき

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \{e^{-sx} f(x)\} = 0$$

が成り立つ  $f(x)$  に対しては

$$\mathcal{L}[f'(x)] = sF(s) - f(0)$$

と簡略化できる。

## 6.3 常微分方程式での応用

$n$  階の定係数常微分方程式

$$f^{(n)}(x) + c_{n-1}f^{(n-1)}(x) + \cdots + c_1f'(x) + c_0f(x) = \sum_{m=0}^n c_m f^{(m)}(x) = g(x) \quad (6.1)$$

( $c_m, m = 0, 1, \dots, n$ , は定数で  $c_n = 1$ ) が与えられたとき, 左辺のラプラス変換を考える.

原関数の  $m$  階微分に対して, 微分のラプラス関係式を繰り返して適応すると

$$\begin{aligned} \mathcal{L} [f^{(m)}(x)] &= \mathcal{L} \left[ \frac{d(f^{(m-1)}(x))}{dx} \right] \\ &= -f^{(m-1)}(x) \Big|_{x=0} + s\mathcal{L} [f^{(m-1)}(x)] \\ &= -f^{(m-1)}(x) \Big|_{x=0} + s \left( -f^{(m-2)}(x) \Big|_{x=0} + s\mathcal{L} [f^{(m-2)}(x)] \right) \\ &= s^m \mathbf{F}(s) - \sum_{i=1}^m s^{i-1} f^{(m-i)}(x) \Big|_{x=0} \end{aligned} \quad (6.2)$$

が得られる.

ラプラス変換の線形性より, 両辺にラプラス変換を行うと

$$\begin{aligned} \mathcal{L} \left[ \sum_{m=0}^n c_m f^{(m)}(x) \right] &= \sum_{m=0}^n c_m \mathcal{L} [f^{(m)}(x)] \\ &= \mathbf{F}(s) \sum_{m=0}^n c_m s^m - \sum_{m=0}^n c_m \sum_{i=1}^m s^{i-1} f^{(m-i)}(x) \Big|_{x=0} = \mathcal{L} [g(x)] \end{aligned}$$

が得られる. 従って, 像関数は

$$\mathbf{F}(s) = \frac{\mathcal{L} [g(x)] + \sum_{m=0}^n c_m \sum_{i=1}^m s^{i-1} f^{(m-i)}(x) \Big|_{x=0}}{\sum_{m=0}^n c_m s^m}$$

となるので, 対応する原関数を見いだすと, 微分方程式の解が求まる.

例 32. 一階微分方程式

$$f'(x) + c_0^2 f(x) = 0$$

の両辺にラプラス変換を行うと

$$s\mathbf{F}(s) - f(0) + c_0\mathbf{F}(s) = 0$$

なるので, 像関数は

$$\mathbf{F}(s) = \frac{f(0)}{s + c_0}$$

で表せる．表 6.1 より対応する原関数は

$$f(x) = f(0)e^{-c_0x}$$

となる．

例 33. 二階非同次微分方程式

$$f''(x) + c_0^2 f(x) = \alpha \cos \omega x$$

の両辺にラプラス変換を行うと

$$s^2 F(s) - sf(0) - f'(x)|_{x=0} + c_0^2 F(s) = \frac{\alpha s}{s^2 + \omega^2}$$

なるので

$$F(s) = \frac{sf(0) + f'(x)|_{x=0}}{s^2 + c_0^2} + \frac{\alpha s}{(s^2 + c_0^2)(s^2 + \omega^2)}$$

で表せる．

第一項は，以下のように変形した後，表 6.1 より定数以外の部分の対応する原関数を求める．

$$f(0) \underbrace{\frac{s}{s^2 + c_0^2}}_{\cos c_0 x} + \frac{f'(x)|_{x=0}}{c_0} \underbrace{\frac{c_0}{s^2 + c_0^2}}_{\sin c_0 x}$$

第二項は表 6.1 より対応する関数が見当たらないので，部分分数展開法を用いて変形する．ある定数  $\beta_1, \beta_2$  に対して

$$\frac{\alpha s}{(s^2 + c_0^2)(s^2 + \omega^2)} = \beta_1 \frac{s}{s^2 + \omega^2} + \beta_2 \frac{s}{s^2 + c_0^2}$$

が成り立つとすると

$$\frac{\alpha s}{(s^2 + c_0^2)(s^2 + \omega^2)} = \frac{s^3(\beta_1 + \beta_2) + s(\beta_1 c_0^2 + \beta_2 \omega^2)}{(s^2 + c_0^2)(s^2 + \omega^2)}$$

となるので，連立方程式

$$\begin{cases} \beta_1 + \beta_2 &= 0 \\ \beta_1 c_0^2 + \beta_2 \omega^2 &= \alpha \end{cases}$$

より

$$\beta_1 = -\beta_2 = \frac{\alpha}{c_0^2 - \omega^2}$$

を得る．表 6.1 より，第二項の展開式で定数以外の部分の対応する原関数を求める．

$$\frac{\alpha}{c_0^2 - \omega^2} \left( \underbrace{\frac{s}{s^2 + \omega^2}}_{\cos \omega x} - \underbrace{\frac{s}{s^2 + c_0^2}}_{\cos c_0 x} \right)$$

最後に，第一項と第二項の結果を統合し，原関数

$$f(x) = f(0) \cos c_0 x + \frac{f'(x)|_{x=0}}{c_0} \sin c_0 x + \frac{\alpha}{c_0^2 - \omega^2} (\cos \omega x - \cos c_0 x)$$

を得る．

## 6.4 フーリエ変換

### 完備な基底

定義 38. 関数の集合が

1. 独立（直行）性：集合の任意の要素関数は，他の要素関数の組合わせで表現することができない．
2. 完備性：すべての関数は，集合の要素関数の組み合で表現できる．

を満たす時，完備な基底と呼ぶ．

### 6.4.1 周期関数のフーリエ級数

#### 三角関数基底

定義 39. 定数と角周波数が  $\omega_0 = 2\pi f = \frac{2\pi}{T}$  ( $T$  は周期) となる三角関数ならなる完備な基底

$$\left\{ \frac{1}{T}, \frac{2}{T} \cos m\omega_0 x, \frac{2}{T} \sin m\omega_0 x \right\}_{m \in \mathbb{Z}^+}$$

を三角関数基底と呼ぶ．

周期  $T$  の関数  $f(x)$  をフーリエ級数展開した場合の一般式

$$\begin{aligned} f(x) &= \rho_0 + \alpha_1 \cos \omega_0 x + \beta_1 \sin \omega_0 x + \alpha_2 \cos 2\omega_0 x + \beta_2 \sin 2\omega_0 x + \cdots \\ &\quad \cdots + \alpha_m \cos m\omega_0 x + \beta_m \sin m\omega_0 x + \cdots \\ &= \rho_0 + \sum_{m=1}^{\infty} [\alpha_m \cos m\omega_0 x + \beta_m \sin m\omega_0 x] \end{aligned} \tag{6.3}$$

のフーリエ係数は，三角関数基底での係数

$$\begin{cases} \rho_0 &= \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(x) dx \\ \alpha_m &= \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(x) \cos m\omega_0 x dx; \quad m \in \mathbb{Z}^+ \\ \beta_m &= \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(x) \sin m\omega_0 x dx; \quad m \in \mathbb{Z}^+ \end{cases}$$

となる。

式(6.3)の  $m$  倍数波成分

$$\alpha_m \cos m\omega_0 x + \beta_m \sin m\omega_0 x$$

に対して

$$\begin{cases} \rho_m &= \sqrt{\alpha_m^2 + \beta_m^2} \\ \phi_0 &= 0 \\ \phi_m &= -\tan^{-1} \frac{\beta_m}{\alpha_m} \end{cases}$$

とおくと

$$f(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \rho_m \cos(m\omega_0 x + \phi_m) \quad (6.4)$$

でシンプルに表現することができる。

電子工学では、コンデンサーやコイルなど多くの電子デバイスの出力が入力信号の周波数に依存するため、特定の周波数  $m\omega_0$  に対応する成分の強度  $\rho_m$  を求めたい場合が多くあるが、式(6.4)での  $\phi_m$  は  $\alpha_m$  と  $\beta_m$  に依存するため、 $f(x)$  と  $\frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \cos(m\omega_0 x + \phi_m) dx$  の積から  $\rho_m$  を計算することはできない。それで、 $\rho_m$  を簡単に求められる次の複素指数基底がよく使われている。

#### 6.4.2 周期関数の複素フーリエ級数

複素指数基底

定義 40. オイラーの公式

$$e^{j\omega} = \cos \omega + j \sin \omega$$

を用いて、周波数が同じの三角関数を複素数  $j$  で結合した集合し、 $m \in \mathbb{Z}$  に拡張した

$$\left\{ \frac{1}{T} e^{jm\omega_0 x} \right\}_{m \in \mathbb{Z}}$$

を複素指数基底と呼ぶ。

周期  $T = \frac{2\pi}{\omega_0}$  の関数  $f(x)$  を複素指数基底で展開した式

$$f(x) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \gamma_m e^{jm\omega_0 x}$$

を複素フーリエ級数展開と呼ぶが、係数  $\gamma_m, m \in \mathbb{Z}$  は次の式で求められる。

$$\begin{aligned} \gamma_0 &= \rho_0 \\ \gamma_m &= \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(x) e^{-jm\omega_0 x} dx \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(x) [\cos m\omega_0 x - j \sin m\omega_0 x] dx \\
&= \frac{1}{2}(\alpha_m - j\beta_m) \\
&= \frac{\rho_m}{2} e^{j\phi_m}
\end{aligned}$$

複素指数基底での係数と式 (6.3) での三角関数基底での係数は

$$\begin{cases} \gamma_0 &= \rho_0 \\ \gamma_{-m} &= \frac{1}{2}(\alpha_m + j\beta_m) \\ \gamma_m &= \frac{1}{2}(\alpha_m - j\beta_m) \end{cases} \quad (6.5)$$

を満たす。

また、式 (6.5) の関係式より、式 (6.3) 三角関数基底での係数は

$$\begin{cases} \alpha_m &= 2\Re(\gamma_m) \\ \beta_m &= -2\Im(\gamma_m) \end{cases}$$

式 (6.4) の展開式の係数は

$$\begin{cases} \rho_m &= 2|\gamma_m| \\ \phi_m &= \arg(\gamma_m) \end{cases}$$

で与えられるので、複素指数基底での係数  $\gamma_{\pm m}$  から三角関数基底での余弦波と正弦波の強度  $\alpha_m$  と  $\beta_m$  及び同じ周波数を統合した合成波の強度  $\rho_m$  と位相  $\phi_m$  などが簡単に求められる。

### 6.4.3 非周期関数のフーリエ変換

周期信号において第  $m$  次高調波成分は

$$\gamma_m = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t) e^{-jm\omega_0 x} dx$$

と定義されているので、 $T \rightarrow \infty (\omega_0 \rightarrow 0)$  となる非周期関数  $f(x)$  に対しては、係数  $\gamma_m, m \in \mathbb{Z}$  がすべて 0 となる。

それで

$$T\gamma_m = \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(x) e^{-jm\omega_0 x} dx$$

から

$$\mathcal{F}[f(x)] = \lim_{T \rightarrow \infty} T\gamma_m = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-j\omega x} dx = \mathcal{F}(\omega)$$

を導入し、非周期関数  $f(x)$  のフーリエ変換と呼ぶが、対応する逆フーリエ変換は

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{F}(\omega) e^{j\omega x} d\omega = \mathcal{F}^{-1}[\mathcal{F}(\omega)]$$

である。

表 6.3 フーリエ変換の性質

| 原関数 $f(x)$                          | 像関数 $\mathcal{F}(\omega)$  |
|-------------------------------------|--|
| $\alpha_1 f_1(x) + \alpha_2 f_2(x)$ | $\alpha_1 \mathcal{F}_1(\omega) + \alpha_2 \mathcal{F}_2(\omega)$  |
| $f^{(n)}(x)$                        | $(j\omega)^n \mathcal{F}(s)$                                       |
| $e^{j\omega_0 x} f(x)$              | $\mathcal{F}(\omega - \omega_0)$                                   |
| $f(x - x_0)$                        | $e^{-j\omega x_0} \mathcal{F}(\omega)$                             |
| $f(\alpha x)$                       | $\frac{1}{ \alpha } \mathcal{F}\left(\frac{\omega}{\alpha}\right)$ |

### 6.5 フーリエ変換の性質

表 6.3 は、微分方程式の解を求める際によく使われるフーリエ変換の性質を示す。

### 6.6 偏微分方程式での応用

フーリエ変換は初期条件が与えられた時の偏微分方程式の解を求めるときによく使われる。

#### 6.6.1 波動方程式

例 29 の波動方程式を、境界条件  $f(0, t) = f(L, t) = 0$  及び初期条件

$$\begin{cases} f(x, 0) & = f_0(x) \\ \left. \frac{\partial f(x, t)}{\partial t} \right|_{t=0} & = f_1(x) \end{cases}$$

での解を求める。

境界条件  $f(0, t) = f(L, t) = 0$  より求めた解 (5.13)

$$f(x, t) = \sum_{m=1}^{\infty} \sin \frac{m\pi x}{L} \left( \beta_{1,m} \cos \frac{m\pi ct}{L} + \beta_{2,m} \sin \frac{m\pi ct}{L} \right)$$

を初期条件に代入すると

$$\begin{cases} f(x, 0) & = \sum_{m=1}^{\infty} \beta_{1,m} \sin \frac{m\pi x}{L} = f_0(x) \\ \left. \frac{\partial f(x, t)}{\partial t} \right|_{t=0} & = \sum_{m=1}^{\infty} \beta_{2,m} \frac{m\pi c}{L} \sin \frac{m\pi x}{L} = f_1(x) \end{cases} \quad (6.6)$$

を得る。

一方、式 (6.3) に、 $\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$  を代入して周期  $T$  の関数で表すと

$$f(x) = \rho_0 + \sum_{m=1}^{\infty} \left[ \alpha_m \cos \frac{2m\pi}{T} x + \beta_m \sin \frac{2m\pi}{T} x \right]$$

となるので, 式(6.6)の係数  $\beta_{1,m}$  と  $\beta_{2,m}$  は  $f_0(x)$  及び  $f_1(x)$  を周期を  $T = 2L$  とおいたフーリエ級数展開より

$$\begin{cases} \beta_{1,m} = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f_0(x) \sin \frac{m\pi}{L} x dx = \frac{2}{L} \int_0^L f_0(x) \sin \frac{m\pi}{L} x dx \\ \beta_{2,m} = \frac{1}{m\pi c} \int_{-L}^L f_1(x) \sin \frac{m\pi}{L} x dx = \frac{2}{m\pi c} \int_0^L f_1(x) \sin \frac{m\pi}{L} x dx \end{cases} \quad (6.7)$$

で計算できる.

例 34. 例 29 の波動方程式を初期条件

$$\begin{aligned} f(x, 0) &= \begin{cases} \frac{2A}{L}x & 0 \leq x \leq \frac{L}{2} \\ \frac{2A}{L}(L-x) & \frac{L}{2} \leq x \leq L \end{cases} \\ \left. \frac{\partial f(x, t)}{\partial t} \right|_{t=0} &= 0 \end{aligned}$$

の下で解け.

【解答例】

式(6.7)に初期条件を代入すると

$$\begin{aligned} \beta_{1,m} &= \frac{2}{L} \int_0^{L/2} \frac{2A}{L} x \sin \frac{m\pi}{L} x dx + \frac{2}{L} \int_{L/2}^L \frac{2A}{L} (L-x) \sin \frac{m\pi}{L} x dx = \frac{8A}{m^2\pi^2} \sin \frac{m\pi}{2} \\ \beta_{2,m} &= 0 \end{aligned}$$

より

$$f(x, t) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{8A}{m^2\pi^2} \sin \frac{m\pi}{2} \sin \frac{m\pi x}{L} \cos \frac{m\pi ct}{L}$$

である.

## 6.6.2 拡散方程式

例 30 のように拡散方程式を満たす関数  $f(x, t)$  の境界条件が有限区間で

$$f(0, t) = f(L, t) = 0$$

で与えられたとき,  $f_x(x) = 0$  以外の解は (5.15) の  $\mu > 0$  の場合で, 拡散方程式の解は

$$f(x, t) = \sum_{m=1}^{\infty} \alpha_{2,m} \sin \frac{m\pi x}{L} e^{-e^2 \left(\frac{m\pi}{L}\right)^2 t}$$

の形式となる (例 30 参照).



従って、初期条件

$$f(x, 0) = \sum_{m=1}^{\infty} \alpha_{2,m} \sin \frac{m\pi x}{L} = f_0(x)$$

が与えられたとき、係数は

$$\alpha_{2,m} = \frac{2}{L} \int_0^L f_0(x) \sin \frac{m\pi x}{L} dx$$

で計算できる。

例 35. 初期条件が

$$f(x, 0) = Ax(L - x)$$

の場合

$$\alpha_{2,m} = \frac{2}{L} \int_0^L f_0(x) \sin \frac{m\pi x}{L} dx = \frac{4AL^2(1 - \cos m\pi)}{m^3\pi^3}$$

なので

$$f(x, t) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{4AL^2(1 - \cos m\pi)}{m^3\pi^3} \sin \frac{m\pi x}{L} e^{-c^2\left(\frac{m\pi}{L}\right)^2 t}$$

となる。

### 6.6.3 ラプラス方程式

例 31 の一般解

$$f(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} \sin \frac{m\pi x}{a} \left( \beta_{1,m} e^{\frac{m\pi y}{a}} + \beta_{2,m} e^{-\frac{m\pi y}{a}} \right)$$

に対して、 $y$  に対する境界条件

$$f(x, 0) = f_0(x), \quad f(x, b) = 0$$

の下での解を考える。

境界条件  $f(x, b) = 0$  より

$$\beta_{2,m} = -\beta_{1,m} e^{\frac{2m\pi b}{a}}$$

を得るので

$$\begin{aligned} f(x, y) &= \sum_{m=1}^{\infty} \beta_{1,m} \sin \frac{m\pi x}{a} \left( e^{\frac{m\pi y}{a}} - e^{\frac{2m\pi b}{a} - \frac{m\pi y}{a}} \right) \\ &= \sum_{m=1}^{\infty} \underbrace{-2\beta_{1,m} e^{\frac{m\pi b}{a}}}_{\beta_m} \sin \frac{m\pi x}{a} \sinh \frac{m\pi(b-y)}{a} \\ &= \sum_{m=1}^{\infty} \beta_m \sin \frac{m\pi x}{a} \sinh \frac{m\pi(b-y)}{a} \end{aligned}$$

となる。

また, 境界条件  $f(x, 0) = f_0(x)$  より

$$\sum_{m=1}^{\infty} \beta_m \sinh \frac{m\pi b}{a} \sin \frac{m\pi x}{a} = f_0(x)$$

と表せるので, 係数は

$$\beta_m = 2 \sinh^{-1} \frac{m\pi b}{a} \int_0^a f_0(x) \sin \frac{m\pi x}{a} dx$$

で計算できる。

例 36. 例 31 の境界条件に

$$f(x, 0) = \sin \frac{\pi x}{a}, \quad f(x, b) = 0$$

を追加した場合, 三角関数基底の直交性により

$$\beta_m = 0, \quad \text{for } m \neq 1$$

となる。

一方,  $m = 1$  の場合は

$$\beta_1 = 2 \sinh^{-1} \frac{\pi b}{a} \int_0^a \sin \left( \frac{\pi x}{a} \right)^2 dx = \sinh^{-1} \frac{\pi b}{a}$$

なので

$$f(x, t) = \sinh^{-1} \frac{\pi b}{a} \sin \frac{\pi x}{a} \sinh \frac{\pi(b-y)}{a}$$

となる。

## 演習問題

1. ラプラス変換を用いて微分方程式

$$f''(x) + 16f'(x) = \sin 2x, \quad f(0) = 1, \quad f'(x)|_{x=0} = 0$$

の解を求めよ。

2. 一次元波動方程式を以下の条件の下で解け。

- 境界条件 ;  $f(0, t) = f(L, t) = 0$
- 初期条件 :  $f(x, 0) = x(L-x), \quad \frac{\partial f(x, t)}{\partial t} \Big|_{t=0} = 0$

3. 式 (5.7) で与えられた一次元拡散方程式を以下の条件の下で解け。

(a) 境界条件 ;  $f(0, t) = f(L, t) = 0$

初期条件 :  $f(x, 0) = \sin^2 \frac{\pi x}{L}$

(b) 境界条件 ;  $f(0, t) = f(L, t) = 0$

初期条件 :  $f(x, 0) = \delta(x - \frac{L}{2})$

4. 式 (5.8) で与えられた二次元ラプラス方程式を正方形領域  $\mathbb{D} : ((x, y))_{x=0, y=0}^{1,1}$  内で, 境界条件

$$f(x, 0) = 1, f(x, 1) = f(0, y) = f(1, y) = 0$$

の下で解け .